

Эффекты гравитации вокруг заряженных и вращающихся коллапсаров в метриках с независимыми параметрами

Захид Закир¹

Аннотация

Метрика Керра-Ньюмана вне заряженных и вращающихся источников, также как Рейснера-Нордстрёма и Керра, включала полную массу на бесконечности, зависящую от заряда и параметра вращения, и поэтому, как решение с точностью до неизвестной функции независимых параметров, была промежуточным этапом решения задачи. Полное решение в виде метрики с независимыми параметрами было дано недавно автором (Закир, 2022). В случае шара с зарядом на поверхности новая метрика включает три независимых параметра – радиус поверхности, заряд и гравитационный радиус шара, равный гравитационному радиусу нейтрального вещества. Энергия электрического поля имеется лишь вне шара и даёт вклад в метрику того же знака, что и вещество. Поэтому рост заряда усиливает гравитацию и её эффекты (замедление времени и красные смещения, радиусы орбит и тени). При коллапсе шара его поверхность асимптотически приближается к гравитационному радиусу и шар застывает (в системе покоя центра), становясь фрозаром. В результате в метрике останутся лишь два параметра, а наблюдаемые следствия будут такими же, как и у шара с данной поверхностью. Метрика вне фрозара с угловым моментом даётся новой формой метрики Керра, включающей два независимых параметра - гравитационный радиус на полюсе и параметр вращения. В ней вклады в метрику энергий вещества и вращения имеют одинаковый знак, и поэтому рост параметра вращения усиливает гравитацию, увеличивая её эффекты. При наличии также и заряда на поверхности метрика даётся новой формой метрики Керра-Ньюмана, также включающей гравитационный радиус на полюсе как независимый параметр. Её следствия являются комбинацией двух предыдущих случаев. Все эти следствия физически корректны, но они противоположны прежним выводам из стандартных метрик Рейснера-Нордстрёма, Керра и Керра-Ньюмана. В прежних метриках зависимость полной массы от заряда и параметра вращения игнорировалась, что затем и вело к ошибочным предсказаниям об ослаблении эффектов гравитации при росте этих параметров. В статье представлены краткий обзор новых метрик и более подробное описание их следствий для наблюдаемых эффектов.

Ключевые слова: заряженный шар, гравитационный радиус, метрика Рейснера-Нордстрёма, метрика Керра, метрика Керра-Ньюмана, чёрная дыра, фрозар, эффекты гравитации, тень

Содержание

1. ВВЕДЕНИЕ	2
2. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ ИСТОЧНИКОВ С ЗАРЯДОМ НА ПОВЕРХНОСТИ	3
2.1. Метрики с независимыми параметрами для шара и фрозара.....	3
2.2. Замедление собственного времени и красные смещения.....	5
2.3. Радиусы орбит фотонов и массивных частиц	7
2.4. Тени заряженных компактных источников.....	8
3. ФРОЗАР С УГЛОВЫМ МОМЕНТОМ	9
3.1. Новая форма метрики Керра как метрика с независимыми параметрами	9
3.2. Замедление собственного времени и красные смещения.....	11
3.3. Радиусы орбит фотонов и массивных частиц	13
3.4. Тень вращающегося коллапсара.....	15
4. КОЛЛАПСАР С УГЛОВЫМ МОМЕНТОМ И ЗАРЯДОМ НА ПОВЕРХНОСТИ	17
4.1. Модифицированная метрика Керра-Ньюмана с независимыми параметрами	17
4.2. Замедление собственного времени и красные смещения.....	19
5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ	21
ПРИЛОЖЕНИЕ. ТЕНЬ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ КОЛЛАПСАРА	22
ЛИТЕРАТУРА.....	23

¹ *Центр теоретической физики и астрофизики, Ташкент Узбекистан, zzakir@qgph.uz ORCID*

1. Введение

В предыдущих двух статьях [1,2] была найдена новая форма точных решений уравнений Эйнштейна для метрик вокруг заряженных и вращающихся источников с истинными зависимостями от заряда Q и параметра вращения a . Оказалось, что они существенно отличаются от прежних зависимостей, содержащихся в стандартных метриках, Рейснера-Нордстрёма (РН) [3-5] и Керра [6,7] в частных случаях, и метрики Керра-Ньюмана (КН) [8] в общем случае (см. [9]).

Причина такого несоответствия заключалась в том, что в новые метрики являются решениями в терминах независимых параметров, тогда как прежние метрики были решениями с точностью до неизвестной функции этих параметров и поэтому являлись лишь промежуточными этапами решения задачи.

Действительно, прежние метрики включали, в качестве основной константы интегрирования, *полную массу* источника на бесконечности $\bar{M}$, определяемой из решения Шварцшильда в асимптотике. Но в $\bar{M}$ входили, кроме массы нейтрального невращающегося вещества M , также и масс-эквиваленты энергий вращения и/или электрического поля. Поэтому $\bar{M}$, будучи не зависимой от координат, зависела от a и Q , т.е. была *некой функцией* других параметров метрики $\bar{M} = f(M, Q, a)$. Поскольку в общем случае неизвестно как $\bar{M}$ изменяется при изменении a и Q , то нельзя и предсказывать зависимость эффектов гравитации от a и Q .

При этом зависимость $\bar{M}(M, Q, a)$ разная в разных моделях структуры источника и поэтому её можно определить только в конкретной физической модели источника. При этом почти все прежние исследования зависимости от a и/или Q свойств коллапсаров и эффектов гравитации были выполнены при произвольно взятых предположениях, что источники это чёрные дыры (ЧД) и что для них $\bar{M}$ *не зависит* от других параметров метрики. Ясно, что результаты этих исследований были ошибочными уже из-за последнего из предположений о постоянстве $\bar{M}$.

По этим причинам, для полного решения задачи и исключения таких ошибок надо определить: а) простейшую и реалистичную модель источника, б) независимый параметр заменяющий в метриках $\bar{M}$, и затем в) найти выражение $\bar{M}$ через независимые параметры и, наконец, г) подставив это в стандартную метрику с $\bar{M}$, найти *метрику с независимыми параметрами*. Только эта форма метрики позволяет изучать корректно зависимость эффектов гравитации от параметров метрики.

Всё это и было выполнено в [1,2], где сначала было показано, что простейшей реалистичной моделью является *пылевая звезда с зарядом на поверхности*, где независимый параметр - это масса нейтрального невращающегося вещества M , а затем было найдено явное выражение для $\bar{M}(M, Q, a)$. При коллапсе такой звезды её поверхность застывает (в системе покоя центра шара) почти на гравитационном радиусе и звезда становится фрозаром (frozar от frozen star, застывшая звезда), для которого:

$$\bar{M}(M, Q, a) = M + \frac{a^2 + Q^2}{4MG^2 / c^4}, \quad (1)$$

где G - гравитационная константа. Подстановка (1) в стандартную метрику КН с $\bar{M}$ затем привела к её новой форме в виде метрики с независимыми параметрами. Эта форма метрики, корректная с физической и последовательная с математической точек зрения,

изменила как физическую картину, так и наблюдаемые следствия метрики КН и её частных случаев, метрик РН и Керра.

В данной статье будет кратко изложены новый подход и его следствия, изученные в [1,2], а также будут приведены графики зависимости от a и/или Q гравитационного замедления времени, красных смещений, радиусов орбит и тени коллапсаров. Более детальное изложение следствий нового подхода будет приведено в книге [10].

Отметим, что, внутренняя структура коллапсара влияет на внешние эффекты вдали от гравитационного радиуса через угловой момент и распределение заряда. В статье учитывается то, что реальные звёзды могут иметь заряд только на поверхности, а сама поверхность при коллапсе асимптотически застывает над гравитационным радиусом на гиперповерхностях одновременности $t = const$, где и описываются все эффекты. Эта картина лежит в основе теории фрозаров, где заряд не просто на поверхности фрозара, но и практически на его гравитационном радиусе. Теория ЧД же исходила из картины точечного источника, где энергия электрического поля и центробежная энергия расходятся, и поэтому в этой модели неявно производилась перенормировка массы, в результате чего и была потеряна связь массы источника с другими параметрами метрики.

В разделах 2-3 статьи приведены метрики с независимыми параметрами и их следствия сначала для заряженных, а затем и для вращающихся фрозаров, а в разделе 4 – для общего случая, когда имеются как заряд, так и угловой момент.

2. Гравитационные поля источников с зарядом на поверхности

2.1. Метрики с независимыми параметрами для шара и фрозара

Пространственно-временной интервал вне заряженного пылевого шара в системе покоя его центра можно привести к диагональному виду:

$$ds^2 = g_{00}(r)c^2 dt^2 + g_{11}(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2)$$

где $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$. Мировое время t отмечает одновременные события и шар как протяжённый объект задан на гиперповерхностях одновременности $t = const$.

Шар с зарядом Q (связанный с обычным зарядом e как $Q = e\sqrt{G}/c^2$, где G - гравитационная константа), в отличие от нейтрального шара, не является компактным источником гравитации. Внутри его поверхности радиусом r_b находится лишь часть его энергии, относящаяся к веществу и электрическому полю заряда внутри шара. Масс-эквивалент этой энергии даётся массой шара $M_b(Q)$. Полная масса $\bar{M}(r, Q)$ в сфере радиуса $r > r_b$ включает также масс-эквивалент энергии электрического поля *вне* шара в интервала (r_b, r) и эта часть полной массы зависит как от r , так и от Q .

Внешняя метрика для шара с зарядом *распределённым во всём объёме* шара была найдена в 1960 г. В. Боннором [11] и П. Флоридесом [12], которые нашли вклад в полную массу шара на бесконечности электрической энергии вне шара: $\Delta \bar{M}(\infty, Q) = e^2 / 2r_b c^2$ и далее $\bar{M}(\infty, Q) = M_b(Q) + e^2 / 2r_b c^2$, показав этим, что рост Q усиливает гравитацию (см. [13]). Но $M_b(Q)$ зависела от Q из-за электрического поля внутри шара и этот недостаток не позволил найти метрику с независимыми параметрами.

В действительности же в случае реального заряженного шара весь заряд быстро сосредоточится на его поверхности, где и достигается электростатическое равновесие. По этой причине в [1] метрика вне шара была получена для такого реалистичного случая

шара с зарядом только на поверхности (Рис. 1), когда масса шара M не зависит от Q . Далее эту метрику получим более простым способом и изучим её следствия.

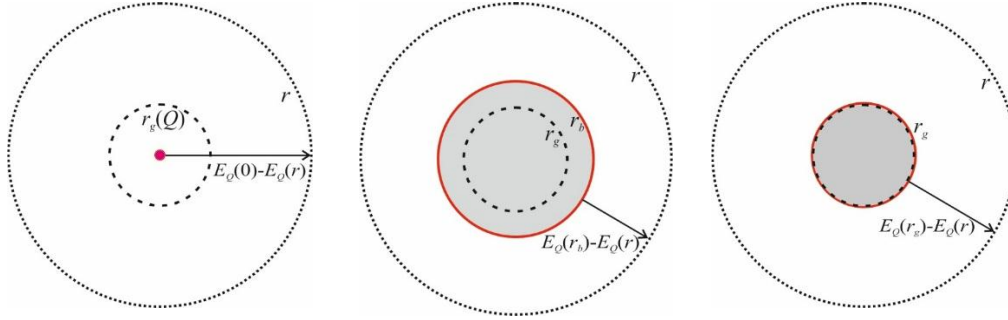


Рис. 1а. Гравитационное и электрическое поля ЧД.

Точечный заряд с $r_b \rightarrow 0$.

Рис. 1б. Гравитационное и электрическое поля шара.

Заряд на поверхности $r_b > r_g$.

Рис. 1с. Гравитационное и электрическое поля фрозара.

Заряд на поверхности $r_b \simeq r_g$.

Энергия электрического поля *вне* сферы радиуса r не даёт вклада в метрику на данной сфере, тогда как энергия электрического поля *внутри* этой сферы увеличивает полную массу внутри этой сферы $\bar{M}(r, Q)$. Поэтому решение уравнений Эйнштейна-Максвелла вне шара с зарядом на поверхности (Рис. 1) проще получить прямо из решения Шварцшильда с этой эффективной гравитирующей массой $\bar{M}(r, Q)$:

$$g_{00}(r) = -g_{11}^{-1}(r) = 1 - \frac{r_{gQ}(r)}{r}, \quad (3)$$

где $r_{gQ}(r) = 2G\bar{M}(r, Q) / c^2$ - эффективный гравитационный радиус. При этом

$$\bar{M}(r, Q) = M + M_Q(r, r_b). \quad (4)$$

где $M_Q(r, r_b)$ - масс-эквивалент энергии электрического поля в интервала (r_b, r) [11,12]:

$$M_Q(r, r_b) = \frac{e^2}{2c^2} \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r} \right). \quad (5)$$

Подставив (5) в (4) и далее подставив результат для $\bar{M}$ в (3), приходим к метрике с *тремя* независимыми параметрами r_b , r_g и Q для шара с зарядом на поверхности [1]:

$$g_{00}(r) = -g_{11}^{-1}(r) = 1 - \frac{r_g}{r} - \frac{Q^2}{r} \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r} \right) = 1 - \frac{r_g}{r} - \frac{Q^2}{r_b r} \left(1 - \frac{r_b}{r} \right), \quad r \geq r_b, \quad (6)$$

где $r_b > r_g$ и $r_g = 2GM / c^2$ - гравитационный радиус нейтрального вещества шара. Отметим, что энергия электрического поля вне шара не влияет на метрику внутри шара.

В области $r \geq r_b > r_g$ метрика (6) не имеет особенностей, выражение в скобках в (6) положительно-определённое, а вклад в метрику энергии электрического поля растёт как Q^2 и того же знака, что и энергии вещества. Поэтому рост Q усиливает гравитацию в $r > r_b$ за счёт роста энергии электрического поля в сфере r . Это означает, что

наблюдаемые эффекты гравитации (радиусы орбит и тени, красные смещения) в поле заряженного шара растут с ростом Q и графики зависимости приведены в разделе 2.2.

Метрика вне заряженного коллапсара (фрозара) в (2) следует из метрики шара (6) при асимптотическом приближении $r_b \rightarrow r_g$ (Рис. 2):

$$g_{00}(r) = -g_{11}^{-1}(r) \simeq \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 - \frac{Q^2}{r_g r}\right) = 1 - \frac{r_g + Q^2 / r_g}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad r > r_g. \quad (7)$$

Эта метрика содержит теперь лишь два независимых параметра r_g, Q . Обозначив

$$r_{gQ} = r_g + \frac{Q^2}{r_g}, \quad (8)$$

метрику (7) можем записать в виде стандартной метрики РН:

$$g_{00}(r) = -g_{11}^{-1}(r) = 1 - \frac{r_{gQ}}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \quad (9)$$

Метрика РН (9) вначале, по аналогии с ньютоновской теорией, формально считалась решением для *точечного* источника [3-6]. В теории ЧД эта ньютоновская картина была прямо экстраполирована в общую теорию относительности (см. [9]). Поскольку физические следствия метрики РН (9) зависят от выбора зависимости r_{gQ} от Q , то выбор точечного источника с $r_b \rightarrow 0$ [3-6] приводит к расходящейся энергии электрического поля в (5). В результате полная масса также становилась расходящейся $\bar{M}(Q) \rightarrow \infty$ и поэтому производилась скрытая *перенормировка массы*, замена $\bar{M}(Q)$ «наблюдаемой» конечной массой $\bar{M}_{obs}$. При этом терялась зависимость $\bar{M}_{obs}$ от Q , и $\bar{M}_{obs}$ считалась не зависящей от Q (даже после того, как в [11-13] эта зависимость была уже найдена).

Такое игнорирование взаимной зависимости параметров стандартной метрики РН вело в теории ЧД к ошибочным следствиям, таким как сложная структура пространства-времени с двумя горизонтами и предсказания, что рост Q якобы ослабляет гравитацию, уменьшая гравитационный радиус и эффекты гравитации (радиусы орбит и теней) [9,14].

2.2. Замедление собственного времени и красные смещения

Для пробной частицы, покоящейся вблизи источника в точке $(r, \theta, \varphi) = const$, интервал собственного времени между двумя событиями $\Delta\tau = g_{00}^{1/2}(r)\Delta t$, следующий из (2), меньше интервала мирового времени Δt между этими же событиями. Это - гравитационное замедление собственных времён. Для метрик вокруг шара (6), фрозара (7) и ЧД (9) имеем соответственно:

$$\Delta\tau_{шар} = \Delta t \left[1 - \frac{r_g}{r} - \frac{Q^2}{r_b r} \left(1 - \frac{r_b}{r} \right) \right]^{1/2}, \quad (10)$$

$$\Delta\tau_{фроз} \simeq \Delta t \left(1 - \frac{r_g}{r} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{Q^2}{r_g r} \right)^{1/2}, \quad (11)$$

$$\Delta \tau_{\text{ЧД}} = \Delta t \left(1 - \frac{r_{gQ}}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{1/2}. \quad (12)$$

Отметим, что в теории ЧД к условию нормировки $r_{gQ} = r_g$ при $Q = 0$ было добавлено предположение, что r_{gQ} не зависит от Q также и при $Q \neq 0$ [9, 14].

В случае шара и фрозара (10)-(11) рост Q уменьшает фактор $g_{00}^{1/2}(r)$, а значит усиливает гравитацию, из-за чего замедление собственного времени становится сильнее. Графики при $r = 3r_g$ показаны на Рис. 3, где видно, что в случае фрозара замедление времени подобно случаю шара, но сильнее. Фрозар есть такой же шар, но его радиус поверхности $r_b \approx r_g$ наименьший среди шаров той же массы, и поэтому полная энергия электрического поля $Q^2 / 2r_b$, обратно пропорциональная r_b , наибольшая, как и её вклад в метрику. В теории ЧД рост Q при условии $r_{gQ} = \text{const}$ увеличивает $g_{00}^{1/2}(r)$ в (12), ослабляя гравитацию и её эффекты, в частности ослабляет замедление времени.

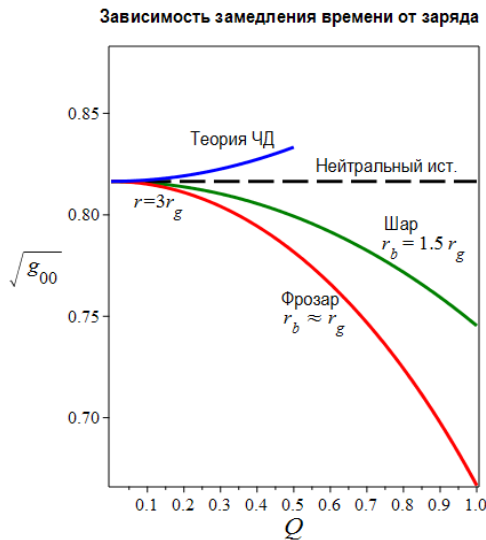


Рис. 3. Зависимость от заряда фактора замедления времени $g_{00}^{1/2}(r)$ при $r = 3r_g$ для шара с $r_b = 1.5r_g$ (10), фрозара с $r_b \approx r_g$ (11) и ЧД (12).

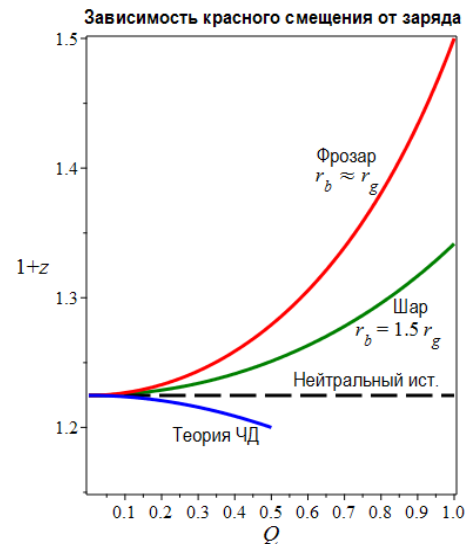


Рис. 4. Зависимость от заряда красного смещения $1 + z = g_{00}^{-1/2}(r)$ при $r = 3r_g$ для шара (13), фрозара (14) и ЧД (15).

Гравитационное красное смещение следует из гравитационного замедления собственных времён. Частота ω (в терминах t) фотонов от источника, покоящегося в точке (r, θ, φ) вблизи шара или фрозара, при принятии вдали будет меньше частоты ω_0 местных фотонов испущенных у наблюдателя: $\omega < \omega_0$. Фактор красного смещения $1 + z = \omega_0 / \omega = g_{00}^{-1/2}(r)$ для шара, фрозара и ЧД даётся выражениями (Рис. 4):

$$1 + z_{\text{шар}} = \left[1 - \frac{r_g}{r} - \frac{Q^2}{r_b r} \left(1 - \frac{r_b}{r} \right) \right]^{-1/2}, \quad (13)$$

$$1 + z_{\text{фроз}} = \frac{\omega_0}{\omega} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{Q^2}{r_g r}\right)^{-1/2}, \quad (14)$$

$$1 + z_{\text{ЧД}} = \frac{\omega_0}{\omega} = \left(1 - \frac{r_{gQ}}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1/2}. \quad (15)$$

Тот факт, что теория ЧД предсказывает зависимости от заряда замедления времени и красных смещений противоположные случаю обычного шара показывает нефизический характер этих предсказаний. В то же время предсказания теории фрозаров такие же как для шара, но энергия электрического поля больше из-за меньшего радиуса поверхности и поэтому эффекты гравитации сильнее.

2.3. Радиусы орбит фотонов и массивных частиц

Уравнения движения в статическом гравитационном поле с метрикой вида (9) и их решения для геодезических траекторий, в частности нескольких выделенных орбит, выраженные через r_{gQ} , хорошо известны (см. [9,14]). Результаты для метрики с независимыми параметрами (7) следуют из них при замене r_{gQ} на r_g согласно (8). Поэтому приведём лишь результаты для зависимости эффектов гравитации от Q .

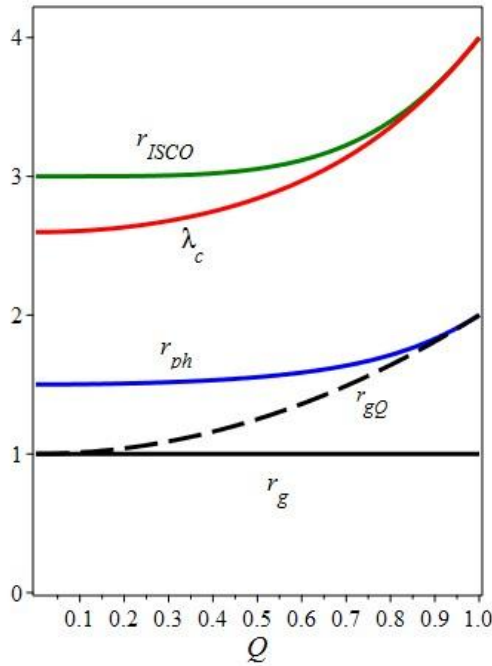


Рис. 5. Радиусы орбит и тени вокруг фрозара при $r_g = 1$.

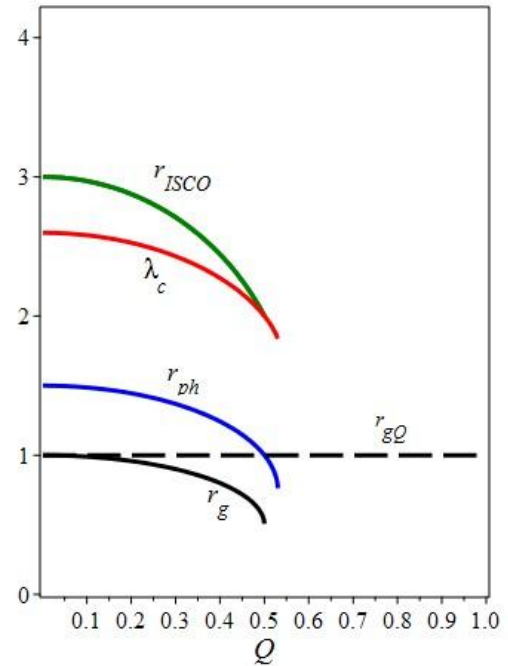


Рис. 6. Радиусы орбит и тени в теории ЧД при $r_{gQ} = 1$.

Формулы для радиусов фотонной орбиты r_{ph} и нижней стабильной орбиты массивной частицы r_{ISCO} , выраженные через r_{gQ} (см. в [9,14]), после учёта зависимости $r_{gQ} = r_g + Q^2 / r_g$ приобретают вид:

$$r_{ph} = \frac{3}{4} \left(r_g + \frac{Q^2}{r_g} \right) \left(1 + \sqrt{1 - \frac{32Q^2}{9(r_g + Q^2/r_g)^2}} \right), \quad (16)$$

$$r_{ISCO} = \frac{1}{2} \left(r_g + \frac{Q^2}{r_g} \right) \left[2 + \xi + \frac{1}{\xi} \left(4 - \frac{12Q^2}{(r_g + Q^2/r_g)^2} \right) \right], \quad (17)$$

$$\xi = 4 \left[2 + \frac{8Q^4}{r_{gQ}^4} - \frac{Q^2}{r_{gQ}^2} \left(9 - \sqrt{\left(1 - \frac{2Q}{r_{gQ}} \right) \left(5 - \frac{8Q}{r_{gQ}} \right)} \right) \right]^{1/3}.$$

Гравитационный радиус фрозара практически не зависит от $|Q|$, т. е. $r_g = const$, а из выражений (16)-(19) следует, что радиусы r_{ph} и r_{ISCO} растут практически как Q^2 . Соответствующие графики, построенные согласно (16)-(19), приведены на Рис. 5-6.

2.4. Тени заряженных компактных источников

Радиус тени заряженного фрозара λ_c даётся выражением [9]:

$$\lambda_c = \frac{r_{ph}}{\sqrt{g_{00}(r_{ph})}}. \quad (18)$$

Подставив сюда g_{00} из (7) и r_{ph} из (16), получаем формулу радиуса тени, выраженную через независимые параметры:

$$\lambda_c = \frac{3}{4} \left(r_g + \frac{Q^2}{r_g} \right) \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - 32Q^2 / 9(r_g + Q^2/r_g)^2}}{\sqrt{(1 - r_g/r_{ph})(1 - Q^2/r_g r_{ph})}}. \quad (19)$$

Таким образом, λ_c растёт практически как Q^2 и график зависимости приведён на Рис. 5. График прежнего предсказания теории ЧД, приведённый на Рис 6, показывает обратную зависимость, что радиус тени якобы уменьшается с ростом величины заряда. Более наглядная картина тени приведена на Рис. 7.

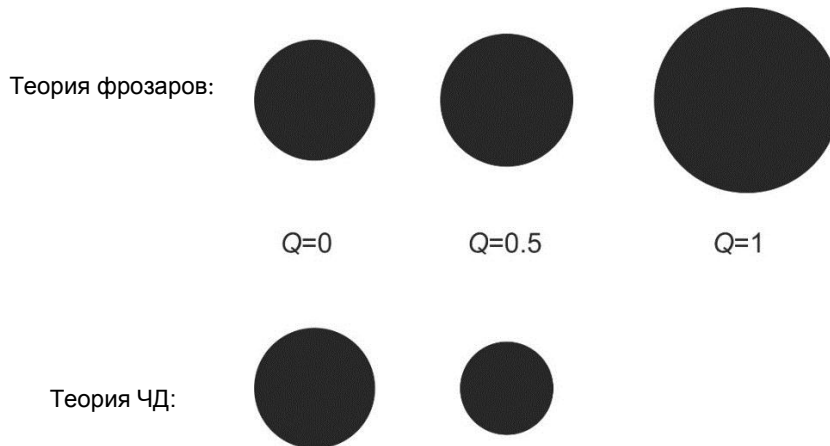


Рис. 7. Зависимость от заряда тени фрозара (вверху) и ЧД (внизу).

3. Фрозар с угловым моментом

3.1. Новая форма метрики Керра как метрика с независимыми параметрами

Для вращающегося источника с массой вещества M и угловым моментом $J = Mac$, где параметр вращения $a = J / Mc$ - это угловой момент на единицу массы (делённый ещё на скорость света c), линейный элемент вокруг него принимает вид:

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 + g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\varphi^2 + 2g_{03}cdtd\varphi, \quad (20)$$

где t - мировое время и метрика зависят только r и θ . При использовании обозначений:

$$\rho^2(\theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - r_{gE}(a)r + a^2, \quad (21)$$

стандартная метрика Керра [6] в координатах Бойера-Линдквиста [7] имеет вид:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_{gE}r}{\rho^2}\right)c^2dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_{gE}ra^2}{\rho^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta d\varphi^2 + \frac{2r_{gE}rac}{\rho^2}\sin^2\theta d\varphi dt, \quad (22)$$

Здесь $r_{gE}(a)$ есть гравитационный радиус на экваторе, определяемый условием (Рис. 8):

$$g_{00}(r_{gE}, \pi/2) = 0. \quad (23)$$

При $a \rightarrow 0$ он становится равным гравитационному радиусу на полюсе: $r_{gE}(0) = r_{gP}$, который уже не зависит от параметра вращения a .

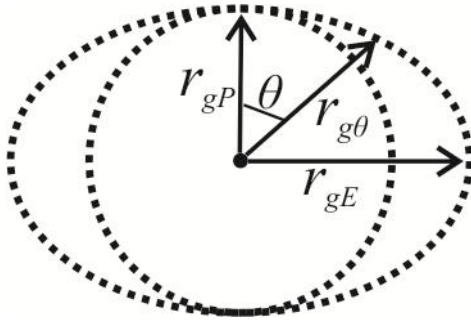


Рис. 8а. Структура ЧД с угловым моментом.

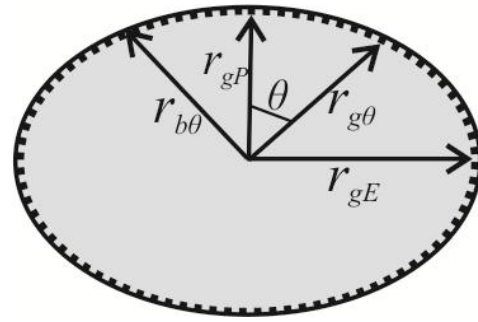


Рис. 8б. Структура фрозара с угловым моментом и радиус-вектором поверхности $\mathbf{r}_{b\theta}$.

На экваториальной плоскости ($\theta = \pi/2, \rho^2 = r^2$) (22) упрощается и переходит в:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_{gE}}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{r^2}{\Delta}dr^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_{gE}a^2}{r}\right)d\varphi^2 + \frac{2r_{gE}ac}{r}d\varphi dt, \quad (24)$$

где условие (23), определяющее физический смысл r_{gE} , выполняется. На полюсе, где $\theta = 0$ и $\rho^2(0) = r^2 + a^2$, (22) принимает простой вид:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2 + a^2} c^2 dt^2 - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr^2. \quad (25)$$

Гравитационный радиус на полюсе r_{gP} определяется условием:

$$g_{00}(r_{gP}, 0) = \frac{\Delta_P}{r^2 + a^2} = 0, \quad \Delta_P \equiv r_{gP}^2 - r_{gE} r_{gP} + a^2 = 0. \quad (26)$$

Разделив последнее равенство на r_{gP} можем выразить r_{gE} через r_{gP} :

$$r_{gE} = r_{gP} + \frac{a^2}{r_{gP}}. \quad (27)$$

Из (27) видно, что r_{gE} , вдобавок к r_{gP} , включает также вклад энергии вращения, пропорциональной a^2 , из-за чего r_{gE} растёт как a^2 . Модификация метрики Керра (22) поэтому сводится к замене зависимого параметра $r_{gE}(a)$ на независимый параметр r_{gP} с помощью (27). Сначала Δ в (21) выразим через r_{gP} :

$$\Delta = r^2 - \left(r_{gP} + \frac{a^2}{r_{gP}} \right) r + a^2 = r^2 \left(1 - \frac{r_{gP}}{r} \right) \left(1 - \frac{a^2}{r_{gP} r} \right), \quad (28)$$

и, подставив в (25), получим линейный элемент на полюсе с независимыми параметрами:

$$ds^2 = \frac{r^2}{\bar{\rho}^2} \left(1 - \frac{r_{gP}}{r} \right) \left(1 - \frac{a^2}{r_{gP} r} \right) c^2 dt^2 - \frac{\bar{\rho}^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_{gP}}{r} \right)^{-1} \left(1 - \frac{a^2}{r_{gP} r} \right)^{-1} dr^2. \quad (29)$$

Здесь $\bar{\rho}^2 = r^2 + a^2$ и явно видна роль r_{gP} как гравитационного радиуса. Подстановка (24) в (27) затем даёт линейный элемент на экваторе с независимыми параметрами:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_{gP}}{r} - \frac{a^2}{r_{gP} r} \right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_{gP}}{r} \right)^{-1} \left(1 - \frac{a^2}{r_{gP} r} \right)^{-1} dr^2 - \\ - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 r_{gP}}{r} + \frac{a^4}{r_{gP} r} \right) d\varphi^2 + \frac{2ac}{r} \left(r_{gP} + \frac{a^2}{r_{gP}} \right) d\varphi dt, \quad (30)$$

Итак, недостатком стандартной формы метрики Керра (22) является тот факт, что один из двух входящих в неё параметров, r_{gE} , зависит от второго, a , в виде (27). Для исправления этого недостатка, как было показано для метрик на полюсе и экваторе, в общей метрике Керра (22) необходимо r_{gE} выразить через r_{gP} согласно (27), что даёт:

$$ds^2 = \frac{r^2}{\rho^2} \left[1 - \frac{r_{gP}}{r} - \frac{a^2}{r_{gP} r} \left(1 - \frac{r_{gP}}{r} \cos^2 \theta \right) \right] c^2 dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \\ - \left[r^2 + a^2 + \frac{ra^2}{\rho^2} \left(r_{gP} + \frac{a^2}{r_{gP}} \right) \sin^2 \theta \right] \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{2rac}{\rho^2} \left(r_{gP} + \frac{a^2}{r_{gP}} \right) \sin^2 \theta d\varphi dt \quad (31)$$

с Δ из (28). Это и есть метрика Керра с двумя независимыми параметрами r_{gP} и a .

Гравитационный радиус в общем случае $r_{g\theta}$, при котором зануляется $g_{00}(r, \theta)$, выражается через независимые параметры r_{gP} и a в виде:

$$r_{g\theta} = \frac{1}{2} \left(r_{gP} + \frac{a^2}{r_{gP}} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(r_{gP} + \frac{a^2}{r_{gP}} \right)^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (32)$$

На полюсе это даёт r_{gP} , на экваторе r_{gE} , а в целом $r_{g\theta}$ описывает сплюснутый эллипсоид вращения (Рис. 7), к которому асимптотически стремится поверхность вращающегося источника при его коллапсе $r_{b\theta} \rightarrow r_{g\theta}$.

При $r > r_{g\theta}$ метрика (31) не имеет особенностей и в ней явно видно, что увеличение a уменьшает g_{00} , а значит *усиливает* гравитационное поле за счёт вклада энергии вращения. В результате, эффекты гравитации, такие как красные смещения, средние радиусы орбит и теней, в поле вращающегося источника *растут* с ростом a . Соответствующие формулы и графики приведены в разделах 3.2 - 3.4.

Однако, в теории ЧД при изучении зависимости наблюдаемых эффектов от a параметр $r_{gE}(a)$ полагался *постоянным* $r_{gE} = \text{const}$ и это приводило к нефизическим следствиям, что рост a , т.е. добавление положительной энергии вращения, *ослабляет* гравитацию источника и поэтому *уменьшает* наблюдаемые эффекты гравитации [9, 15].

3.2. Замедление собственного времени и красные смещения

При наличии углового момента гравитационное замедление времени, т.е. замедление собственного времени τ по отношению к t в точке $(r, \theta, \varphi) = \text{const}$, описывается сокращением интервала $\Delta\tau = \Delta t g_{00}^{1/2}(r, \theta)$ между двумя событиями в этой точке. Согласно (31) для фрозара и (22) для ЧД, имеем:

$$\Delta\tau_{\text{фроз}} \simeq \Delta t \frac{r^2}{\rho^2} \left[1 - \frac{r_{gP}}{r} - \frac{a^2}{r_{gP}r} \left(1 - \frac{r_{gP}}{r} \cos^2 \theta \right) \right]^{1/2}, \quad (33)$$

$$\Delta\tau_{\text{ЧД}} \simeq \Delta t \left(1 - \frac{r_{gE}r}{\rho^2} \right)^{1/2}. \quad (34)$$

Формула (34) следует из стандартной метрики РН, использовавшейся в теории ЧД полагая r_{gE} равным r_{gP} при $a = 0$ и не зависящим от a также и при $a \neq 0$ [9,12].

На экваторе ($\theta = \pi/2$) имеем соответственно:

$$\Delta\tau_{\text{фроз}} \simeq \Delta t \left(1 - \frac{r_{gP}}{r} - \frac{a^2}{r_{gP}r} \right)^{1/2}, \quad (35)$$

$$\Delta\tau_{\text{ЧД}} \simeq \Delta t \left(1 - \frac{r_{gE}}{r} \right)^{1/2}, \quad (36)$$

и на полюсе ($\theta = 0$):

$$\Delta\tau_{\text{фроз}} \simeq \Delta t \left(\frac{(1-r_{gP}/r)(1-a^2/r_{gP}r)}{1+a^2/r^2} \right)^{1/2}, \quad (37)$$

$$\Delta\tau_{\text{чД}} \simeq \Delta t \left(1 - \frac{r_{gE}r}{r^2+a^2} \right)^{1/2}. \quad (38)$$

Графики зависимости от a фактора замедления времени $g_{00}^{1/2}(r, \theta)$ показаны на Рис. 9.

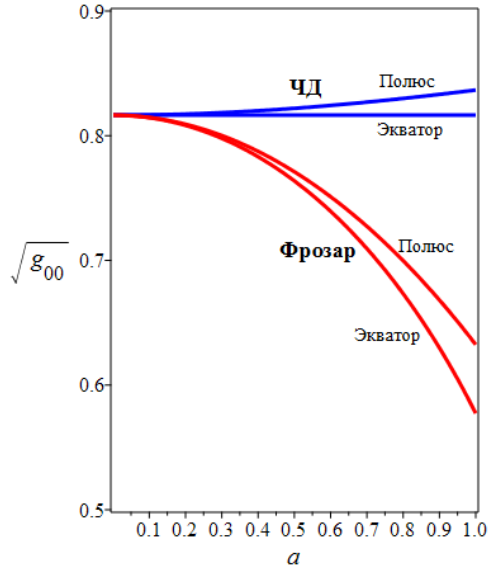


Рис. 9. Зависимость от a фактора замедления времени $g_{00}^{1/2}(r, \theta)$ фрозара и ЧД при $r = 3r_{gP}$.

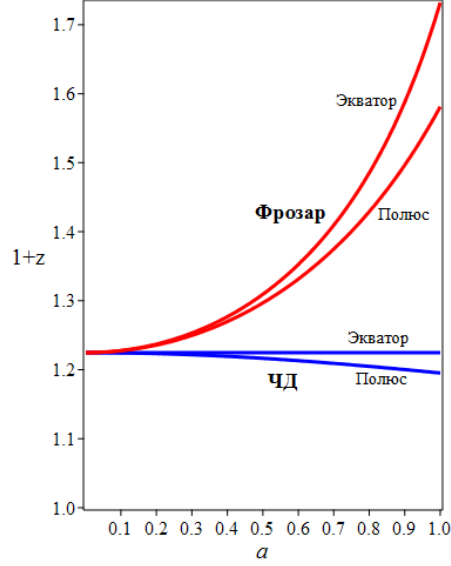


Рис. 10. Зависимость от a фактора красного смещения $1+z = g_{00}^{-1/2}(r, \theta)$ при $r = 3r_{gP}$.

Частота ω фотонов (в терминах t), испущенных в точке (r, θ, φ) около коллапсара и принятых удалённым наблюдателем, сравниваются с частотой ω_0 местных фотонов (испущенных у наблюдателя), что даёт $\omega < \omega_0$. Факторы красного смещения $1+z = \omega_0 / \omega$ в случаях фрозара и теории ЧД даются выражениями, соответственно:

$$1+z_{\text{фроз}} = \frac{r^2}{\rho^2} \left[1 - \frac{r_{gP}}{r} - \frac{a^2}{r_{gP}r} \left(1 - \frac{r_{gP}}{r} \cos^2 \theta \right) \right]^{-1/2}, \quad (39)$$

$$1+z_{\text{чД}} = \left(1 - \frac{r_{gE}r}{\rho^2} \right)^{-1/2}. \quad (40)$$

Для фрозара на экваторе и на полюсе (39) принимает вид, соответственно:

$$1+z_{\text{фроз}} = \left(1 - \frac{r_{gP}}{r} - \frac{a^2}{r_{gP}r} \right)^{-1/2}, \quad (41)$$

$$1+z_{\text{фроз}} = \left(\frac{1+a^2/r^2}{(1-r_{gP}/r)(1-a^2/r_{gP}r)} \right)^{1/2}, \quad (42)$$

а для ЧД из (40) следуют выражения на экваторе и полюсе, соответственно:

$$1 + z_{\text{ЧД}} = \left(1 - \frac{r_{gE}}{r}\right)^{-1/2}, \quad 1 + z_{\text{ЧД}} = \left(1 - \frac{r_{gE}r}{r^2 + a^2}\right)^{-1/2}. \quad (43)$$

На Рис. 10 приведены соответствующие графики зависимости $1 + z$ от a .

Как и в случае с зарядом, в случае фрозара увеличение a уменьшает $g_{00}^{1/2}(r, \theta)$, как видно из (39), (41), (42), что естественно, так как увеличение энергии вращения источника при той же массе вещества усиливает гравитацию вне его, а значит увеличивает замедление собственного времени и красные смещения. Однако, в теории ЧД с условием $r_{gE} = \text{const}$ утверждалось обратное, что рост a увеличивает фактор $g_{00}^{1/2}(r, \theta)$ в (40) и (43), ослабляя гравитацию и уменьшая замедление времени и красные смещения.

3.3. Радиусы орбит фотонов и массивных частиц

Уравнения движения и интегралы движения в стандартной метрике Керра (22) с зависимым параметром $r_{gE}(a)$ хорошо известны, а выражения для радиусов характерных орбит приведены в [9,14]. Для получения соответствующих выражений для новой формы метрики Керра с независимыми параметрами (31) во всех выражениях для наблюдаемых эффектов достаточно сделать замену (27). Поэтому приведём лишь результаты такой замены и графики получившихся зависимостей от a .

Введя обозначение $a_* \equiv a / r_{gP}$, выражение (27) для r_{gE} запишем в виде:

$$r_{gE} = r_{gP}(1 + a_*^2). \quad (44)$$

Этот гравитационный радиус на экваторе растёт как a^2 (Рис. 11а,12а).

Радиусы фотонной орбиты $r_{ph\pm}$ в двух направлениях вращения на орбите, и среднее этих радиусов r_{ph0} (где эффект увлечения практически компенсирован) равны (Рис. 11а):

$$r_{ph\mp} = r_{gP}(1 + a_*^2) \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2}{3} \arccos \left(\mp \frac{2a_*}{1 + a_*^2} \right) \right] \right\}, \quad r_{ph0} = \frac{1}{2}(r_{ph+} + r_{ph-}). \quad (45)$$

При $a = r_{gP} / 2$, $a_* = 1/2$ для верхнего знака (ко-вращение) имеем $r_{ph-} \simeq 1.13r_{gP}$, для нижнего знака (контр-вращение) $r_{ph+} \simeq 2.39r_{gP}$, а среднее их равно $r_{ph0} \simeq 1.76r_{gP}$. Они больше, чем в теории ЧД (Рис. 11б): $r_{ph-} \simeq 0.5r_{gP}$, $r_{ph+} \simeq 2r_{gP}$ и $r_{ph0} \simeq 1.25r_{gP}$.

Предельные радиусы орбиты связанного состояния $r_{mb\pm}$ и r_{mb0} равны (Рис. 12а):

$$r_{mb\mp} = r_{gP}(1 + a_*^2) \left(1 \mp \frac{2a_*}{1 + a_*^2} + \sqrt{1 \mp \frac{2a_*}{1 + a_*^2}} \right), \quad r_{mb0} = \frac{1}{2}(r_{mb-} + r_{mb+}). \quad (46)$$

При $a = r_{gP} / 2$, $a_* = 1/2$ в случае ко-вращения $r_{ph-} = r_{gP}(3 + \sqrt{5}) / 4 \simeq 1.31r_{gP}$, а при контр-вращении $r_{ph+} = r_{gP}(7 + 3\sqrt{5}) / 4 \simeq 3.43r_{gP}$, и $r_{mb0} = 2.37r_{gP}$. Эти значения больше предсказаний для ЧД: $r_{ph-} \simeq 0.5r_{gP}$, $r_{ph+} \simeq 2.91r_{gP}$ и $r_{mb0} = 1.71r_{gP}$ (Рис. 12б).

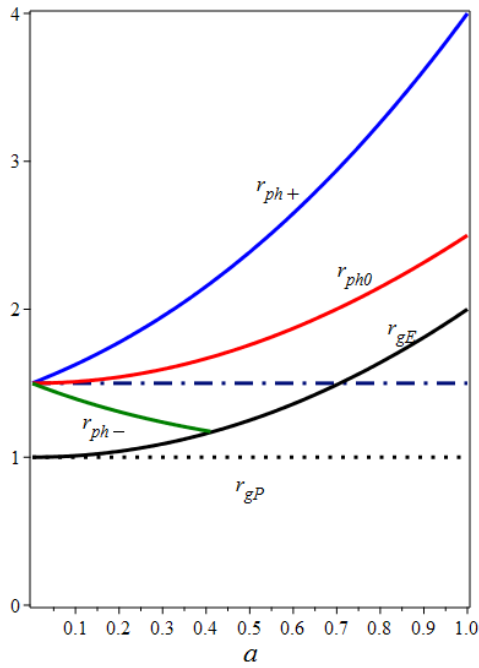


Рис. 11а. Радиусы фотонных орбит в двух направлениях вращения $r_{ph\pm}$ и их среднее r_{ph0} для фрозара в новой форме метрики Керра.

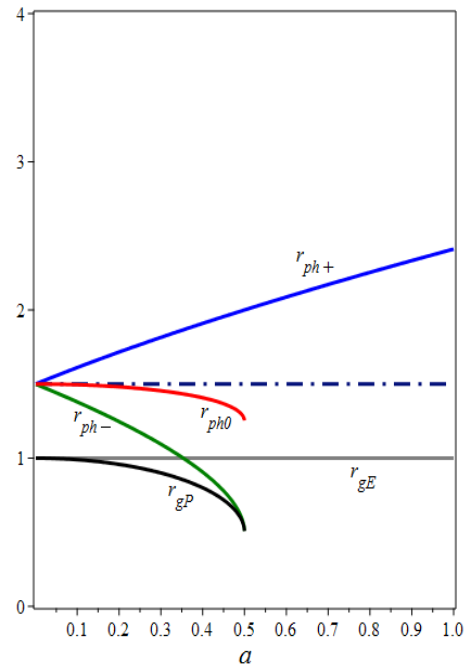


Рис. 11б. Радиусы фотонных орбит в двух направлениях вращения $r_{ph\pm}$ и их среднее r_{ph0} в стандартной метрике Керра для ЧД.

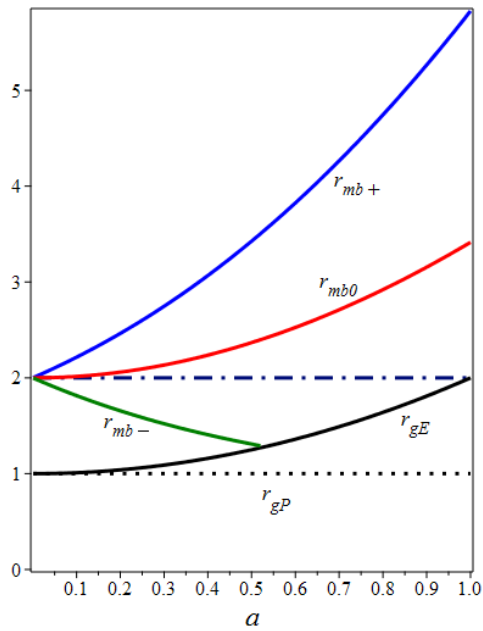


Рис. 12а. Предельные радиусы орбиты связанного состояния в двух направлениях вращения на орбите $r_{mb\pm}$ и их среднее r_{mb0} для фрозара в новой форме метрики Керра.

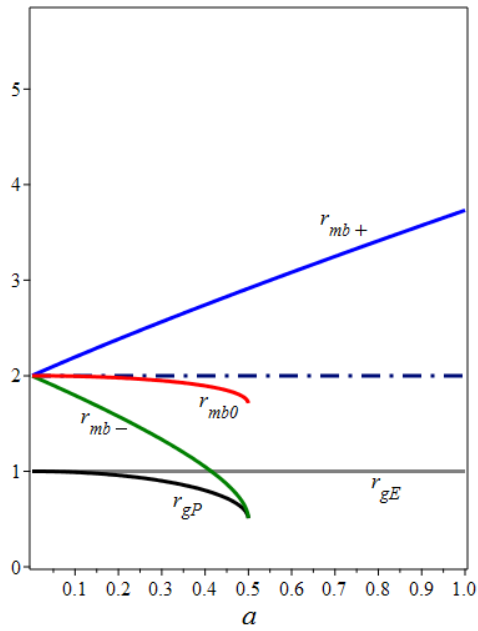


Рис. 12б. Предельные радиусы орбиты связанного состояния $r_{mb\pm}$ и их среднее r_{mb0} в стандартной метрике Керра для ЧД.

Радиусы $r_{ISCO\pm}$, r_{ISCO0} низшей стабильной орбиты частиц находим из (Рис. 13а):

$$r_{ISCO\mp} = r_{gP}(1+a_*^2) \left\{ \frac{3}{2} + Z_2 \mp \left[\left(\frac{3}{2} - Z_1 \right) \left(\frac{3}{2} + Z_1 + 2Z_2 \right) \right]^{1/2} \right\}, \quad (47)$$

$$r_{ISCO0} = \frac{1}{2}(r_{ISCO-} + r_{ISCO+}), \quad (48)$$

$$Z_1 = \frac{1}{2} \{1 + (1-b^2)^{1/3} [(1+b)^{1/3} + (1-b)^{1/3}]\}, \quad Z_2 = (Z_1^2 + 3b^2/4)^{1/2}, \quad b = \frac{2a_*}{1+a_*^2}$$

При $a = r_{gP}/2$, $a_* = 1/2$ имеем $r_{ISCO-} \simeq 2.25r_{gP}$ (ко-вращение), $r_{ISCO+} \simeq 5.99r_{gP}$ (контр-вращение) и их среднее $r_{ISCO0} \simeq 4.12r_{gP}$. Эти значения больше, чем в теории ЧД (Рис. 13б): $r_{ISCO-} \simeq 0.5r_{gP}$, $r_{ISCO+} \simeq 4.5r_{gP}$ и $r_{ISCO0} \simeq 2.5r_{gP}$.

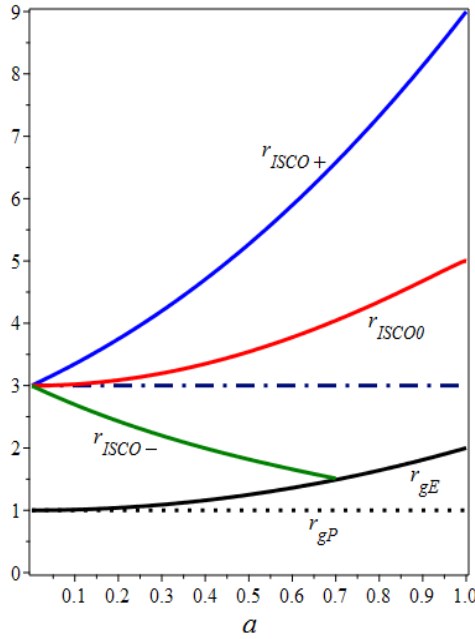


Рис. 13а. Радиусы низших стабильных орбит частиц $r_{ISCO\pm}$ и их среднее r_{ISCO0} для фрозара в новой форме метрики Керра.

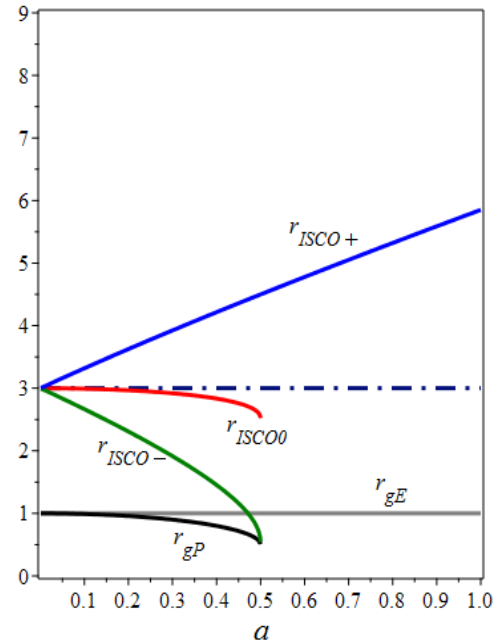


Рис. 13б. Радиусы низших стабильных орбит частиц $r_{ISCO\pm}$ и их среднее r_{ISCO0} в стандартной метрике Керра для ЧД.

3.4. Тень вращающегося коллапсара

Из графиков предыдущего раздела ясно, что в новой форме метрики Керра (31) рост a , усиливая гравитацию, ведёт к росту площади тени коллапсара, тогда как в прежних предсказаниях на базе стандартной формы метрики Керра тень уменьшалась [9,17,18].

Это видно на примере предельного случая $a = r_{gE}/2$ ($a = \bar{M}$ в «геометрических единицах»), где имеется явное выражение для контура тени для далёкого наблюдателя на экваториальной плоскости. Проекция тени на плоскость перпендикулярную линии между наблюдателем и центром источника, даётся формулой (см. Приложение):

$$y(x) = \pm r_{gE} \frac{\tilde{r}}{2} \sqrt{\frac{1 + 3\tilde{r}^2 - 4x^2 / r_{gE}^2}{\tilde{r}^2 - 1}}, \quad (49)$$

$$\tilde{r}(x) = 1 + \sqrt{2(1 + x / r_{gE})}, \quad (50)$$

где ось y направлена по оси вращения источника, а ось x на экваториальной плоскости. Учёт реальной зависимости r_{gE} от a согласно (27) в данном случае даёт $r_{gE} = 5r_{gP} / 4$ и формула контура тени (49) принимает вид:

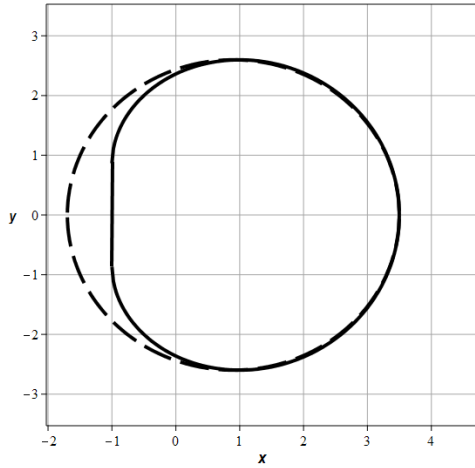


Рис. 14а. Контур тени ЧД при $a = r_{gE} / 2$.

Штриховая линия при $a = 0$ (сдвинута для сравнения).

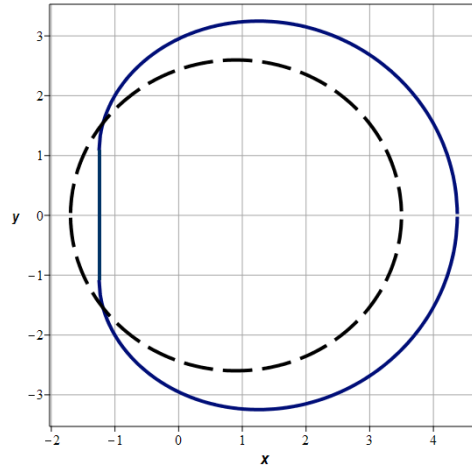


Рис. 14б. Контур тени фрозара с $a = r_{gP} / 2$.

Штриховая линия при $a = 0$ (сдвинута для сравнения).

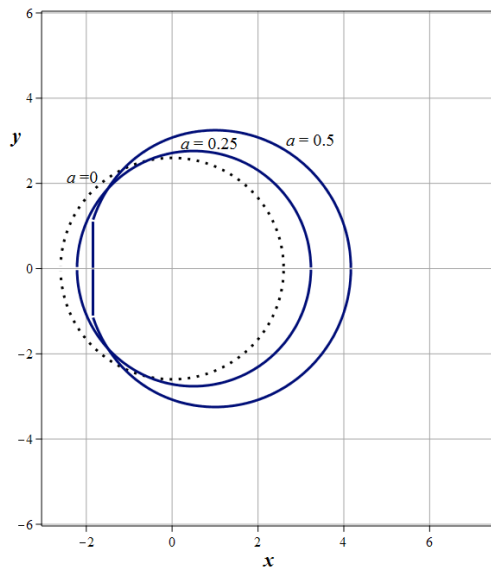


Рис. 15а. Контур тени фрозара при значениях $a = (0.25; 0.5)r_{gP}$. Точечный контур: $a = 0$.

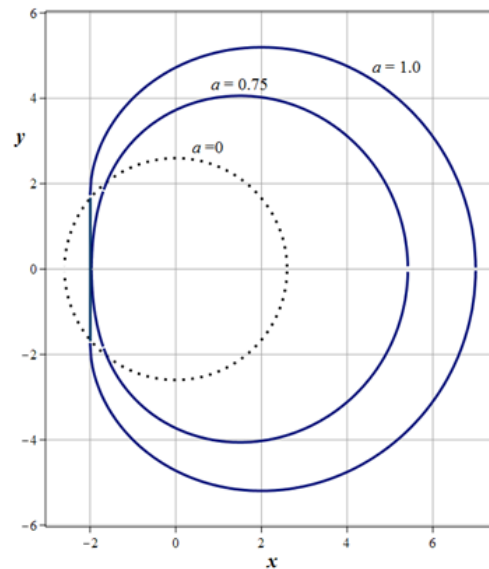


Рис. 15б. Контур тени фрозара при значениях $a = (0.75; 1.0)r_{gP}$.

$$y(x) = \pm r_{gP} \frac{5\tilde{r}}{8} \sqrt{\frac{1 + 3\tilde{r}^2 - 64x^2 / 25r_{gP}^2}{\tilde{r}^2 - 1}}, \quad (51)$$

$$\tilde{r}(x) = 1 + \sqrt{2(1 + 4x / 5r_{gP})}. \quad (52)$$

Графики для (49) и (51) приведены на Рис. 14.

Выражения в общем случае, описанные в [18], приведены в приложении с учётом (27). Графики контура тени показаны на Рис. 15.

4. Коллапсар с угловым моментом и зарядом на поверхности

4.1. Модифицированная метрика Керра-Ньюмана с независимыми параметрами

Метрика КН вокруг компактного источника с параметром вращения a и зарядом Q (Рис. 8), следует из стандартной метрики Керра (22) при замене $r_{gE}r \rightarrow r_{gEQ}r - Q^2$, где r_{gEQ} переходит в гравитационный радиус на экваторе в пределе $Q = 0$. Линейный элемент с такой метрикой принимает вид:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_{gEQ}r - Q^2}{\rho^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta_Q} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 + \frac{2a(r_{gEQ}r - Q^2)}{\rho^2} \sin^2 \theta c dt d\varphi - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2(r_{gEQ}r - Q^2)}{\rho^2} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (53)$$

$$\Delta_Q(r) = r^2 - r_{gEQ}r + a^2 + Q^2. \quad (54)$$

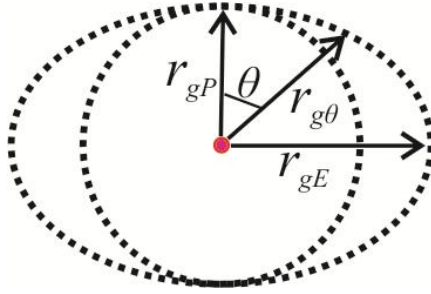


Рис. 16а. Структура ЧД с угловым моментом и зарядом. Все радиусы – «окружные» радиусы.

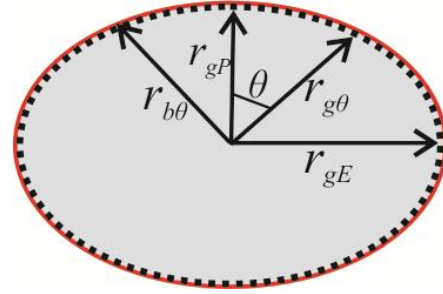


Рис. 16б. Структура фрозара с угловым моментом и зарядом на поверхности радиуса $r_{b\theta}$.

Коллапс звезды с угловым моментом и с зарядом на поверхности приводит к образованию звезды с застывшей структурой (фрозара), эллипсоидальная поверхность которой асимптотически стремится к гравитационному радиусу $r_{g\theta Q}$ (Рис. 16б).

Как и у нейтрального фрозара с угловым моментом, гравитационный радиус на полюсе $r_{g\theta} \big|_{\theta=0} = r_{gP}$ следует из условия:

$$g_{00}(r_{gP}, 0) = \frac{\Delta_Q(r_{gP})}{r_{gP}^2 + a^2} = 0, \quad \Delta_Q(r_{gP}) = r_{gP}^2 - r_{gEQ}r_{gP} + a^2 + Q^2 = 0. \quad (55)$$

Разделив последнее равенство на r_{gP} получаем выражение r_{gEQ} через r_{gP} [2]:

$$r_{gEQ} = r_{gP} + \frac{a^2 + Q^2}{r_{gP}}. \quad (56)$$

Это позволяет записать $\Delta_Q(r)$ в (54) через независимый параметр r_{gP} :

$$\Delta_Q(r) = r^2 - \left(r_{gP} + \frac{a^2 + Q^2}{r_{gP}} \right) r + a^2 + Q^2 = r^2 \left(1 - \frac{r_{gP}}{r} \right) \left(1 - \frac{a^2 + Q^2}{r_{gP} r} \right). \quad (57)$$

Подставив это и (56) в (53), получаем линейный элемент на полюсе:

$$ds^2 = \frac{r^2 \Delta_Q}{\bar{\rho}^2} c^2 dt^2 - \frac{\bar{\rho}^2}{r^2 \Delta_Q} dr^2. \quad (58)$$

где $\bar{\rho}^2 = r^2 + a^2$. Здесь явно видна роль r_{gP} как гравитационного радиуса на полюсе.

При подстановке (56) в (53) линейный элемент на экваторе принимает вид:

$$ds^2 = \frac{\Delta_Q - a^2}{r^2} c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\Delta_Q} - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 K}{r} \right) d\varphi^2 + \frac{2aK}{r} c dt d\varphi, \quad (59)$$

$$K = r_{gP} + \frac{a^2 + Q^2(1 - r_{gP}/r)}{r_{gP}} \quad (60)$$

В отличие от (53), здесь явно видно, что увеличение a и Q , не влияющее на r_{gP} , ведёт к уменьшению g_{00} , а значит и к усилению гравитации источника. Гравитационный радиус на экваторе $r_{g\theta} \big|_{\theta=\pi/2} = r_{gE}$ находим из условия

$$g_{00}(r_{gP}, \pi/2) = \frac{\Delta_Q(r_{gE}) - a^2}{r_{gE}^2} = 0, \quad r_{gE}^2 - \left(r_{gP} + \frac{a^2 + Q^2}{r_{gP}} \right) r_{gE} + Q^2 = 0 \quad (61)$$

что даёт:

$$r_{gE} = \frac{r_{gEQ}}{2} + \sqrt{\frac{r_{gEQ}^2}{4} - Q^2} = \frac{1}{2} \left(r_{gP} + \frac{a^2 + Q^2}{r_{gP}} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(r_{gP} + \frac{a^2 + Q^2}{r_{gP}} \right)^2 - Q^2}. \quad (62)$$

Итак, в стандартной форме метрики КН (53) один из трёх входящих в неё параметров, $\bar{r}_{gE}$, зависит от двух других параметров a и Q , и для перехода к независимым параметрам $\bar{r}_{gE}$ необходимо выразить через r_{gP} согласно (56). Подставив (56) в (53), с учётом (57) и (60), приходим к модифицированной метрике КН с тремя независимыми параметрами a , Q и r_{gP} :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{rK}{\rho^2} \right) c^2 dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta_Q} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 + \frac{2a}{\rho^2} rK \sin^2 \theta \cdot c dt d\varphi - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 rK}{\rho^2} \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (63)$$

Гравитационный радиус $r_{g\theta}$ находим из условия $g_{00}(r_{g\theta}, \theta) = 0$, что даёт [2]:

$$r_{g\theta}^2 - \left(r_{gP} + \frac{a^2 + Q^2}{r_{gP}} \right) r_{g\theta} + a^2 \cos^2 \theta + Q^2 = 0. \quad (64)$$

Решая это уравнение, выражаем $r_{g\theta}$ через независимые параметры:

$$r_{g\theta} = \frac{1}{2} \left(r_{gP} + \frac{a^2 + Q^2}{r_{gP}} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(r_{gP} + \frac{a^2 + Q^2}{r_{gP}} \right)^2 - a^2 \cos^2 \theta - Q^2}. \quad (65)$$

На полюсе это даёт r_{gP} , а на экваторе переходит в r_{gE} из (62).

В общем случае $r_{g\theta}$ описывает поверхность фрозара как сплюснутого эллипсоида вращения (с точностью до малой поправки), где и находится его заряд. Из-за центробежных сил поверхностная плотность заряда на экваторе выше, чем на полюсе и это ведёт к деформации электрического поля. Эквипотенциальные поверхности будут, сплюснутыми на полюсах и соответствующие наблюдательные эффекты, включая магнитные эффекты, будут рассмотрены более детально в книге [10].

При $r > r_{gP}$ метрика (63) не имеет особенностей и явно видно, что увеличение a и Q уменьшает g_{00} и поэтому усиливает гравитацию источника из-за вклада энергий вращения и электрического поля. Поэтому радиусы орбит и теней, красные смещения и углы отклонения частиц в поле такого источника возрастают с ростом a и Q .

Прежние предсказания теории ЧД для зависимости наблюдаемых эффектов от изменения a или Q , сделанные при постоянном параметре r_{gEQ} , также следует заменить на новые предсказания с корректным учётом (56).

4.2. Замедление собственного времени и красные смещения

Замедление интервала собственного времени $\Delta\tau = \Delta t g_{00}^{1/2}(r, \theta)$ между двумя событиями в точке (r, θ, φ) вокруг источника с угловым моментом и зарядом, согласно (31), даётся выражениями для фрозара и ЧД соответственно:

$$\Delta\tau_{\text{фроз}} \simeq \Delta t \left(1 - \frac{rK}{\rho^2} \right)^{1/2}. \quad (66)$$

$$\Delta\tau_{\text{ЧД}} \simeq \Delta t \left(1 - \frac{r_{gEQ} r - Q^2}{\rho^2} \right)^{1/2}. \quad (67)$$

где K даётся (60). На экваторе ($\theta = \pi/2$) имеем:

$$\Delta\tau_{\text{фроз}} \simeq \Delta t \left(1 - \frac{r_{gP}}{r} - \frac{a^2 + Q^2(1 - r_{gP}/r)}{r_{gP} r} \right)^{1/2}, \quad (68)$$

$$\Delta\tau_{\text{ЧД}} \simeq \Delta t \left(1 - \frac{r_{gEQ}}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{1/2}, \quad (69)$$

а на полюсе ($\theta = 0$):

$$\Delta\tau_{\text{фроз}} \simeq \frac{\Delta t}{(1+a^2/r^2)^{1/2}} \left(1 - \frac{r_{gP}}{r}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{a^2 + Q^2}{r_{gP}r}\right)^{1/2}, \quad (70)$$

$$\Delta\tau_{\text{чд}} \simeq \frac{\Delta t}{(1+a^2/r^2)^{1/2}} \left(1 - \frac{r_{gEQ}}{r} + \frac{a^2 + Q^2}{r^2}\right)^{1/2}. \quad (71)$$

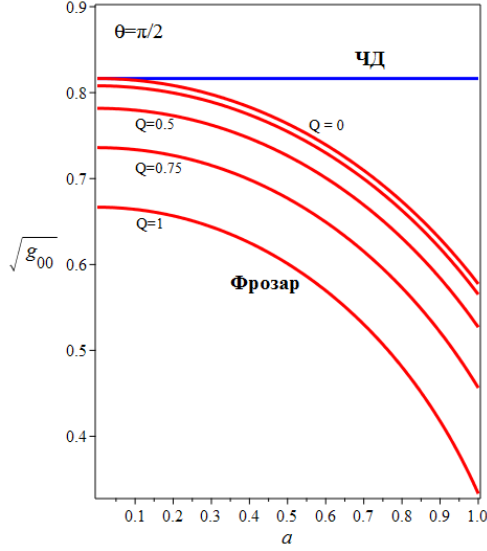


Рис. 17а. Зависимость фактора замедления времени $g_{00}^{1/2}(r)$ от a в (68) при $r = 3r_g$ и $\theta = \pi/2$ для фрозара с $r_b \simeq r_g$ и ЧД (69).

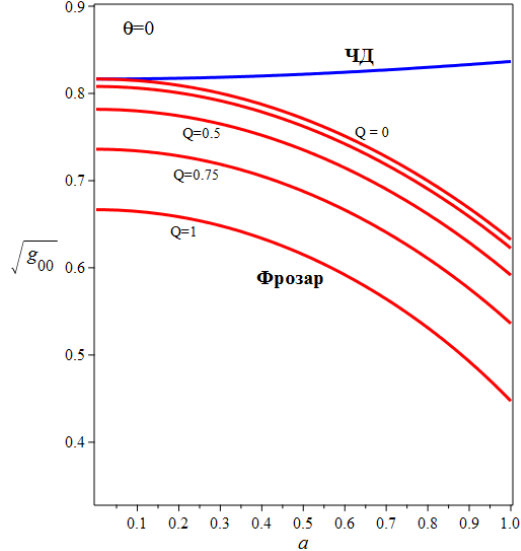


Рис. 17б. Зависимость фактора замедления времени $g_{00}^{1/2}(r)$ от a в (70) при $r = 3r_g$ и $\theta = 0$ для фрозара с $r_b \simeq r_g$ и ЧД (71).

Графики зависимости $g_{00}^{1/2}(r, \theta)$ от a и Q показаны на Рис. 17.

Фотоны, испущенные в точке r вблизи фрозара с частотой ω в терминах t и принятые удалённым наблюдателем сравниваются с частотой ω_0 местных фотонов (испускаемых около наблюдателя), что даёт $\omega < \omega_0$. Факторы красного смещения $1+z = \omega_0 / \omega = g_{00}^{-1/2}(r, \theta)$, согласно (68)-(70), даются выражениями:

$$1+z_{\text{фроз}} \simeq \left(1 - \frac{rK}{\rho^2}\right)^{-1/2}. \quad (72)$$

$$1+z_{\text{чд}} \simeq \left(1 - \frac{r_{gEQ}r - Q^2}{\rho^2}\right)^{-1/2}. \quad (73)$$

На экваторе $\theta = \pi/2$ имеем:

$$1+z_{\text{фроз}} \simeq \Delta t \left(1 - \frac{r_{gP}}{r} - \frac{a^2 + Q^2(1 - r_{gP}/r)}{r_{gP}r}\right)^{1/2}, \quad (74)$$

$$1 + z_{\text{ЧД}} \simeq \Delta t \left(1 - \frac{r_{gEQ}}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{1/2}, \quad (75)$$

а на полюсе $\theta = 0$:

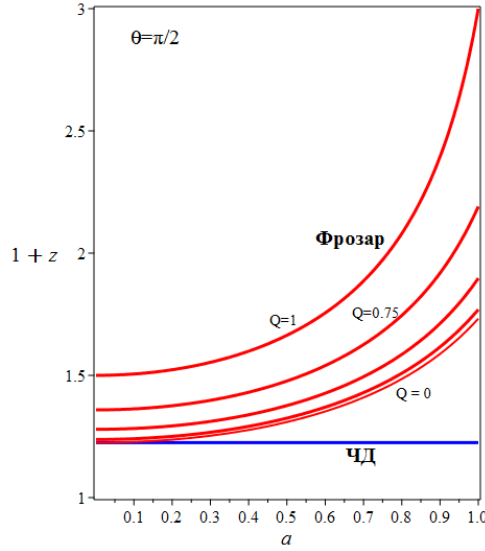


Рис. 18а. Зависимость от a красного смещения $1 + z = g_{00}^{-1/2}(r)$ при $r = 3r_g$ и $\theta = \pi/2$ для фрозара (74) и ЧД (75).

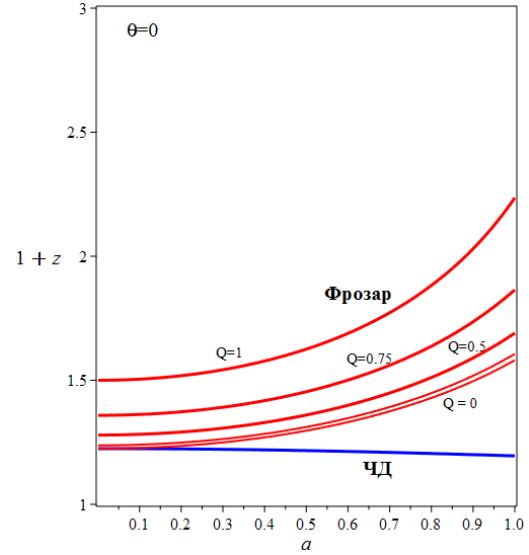


Рис. 18б. Зависимость от a красного смещения $1 + z = g_{00}^{-1/2}(r)$ в при $r = 3r_g$ и $\theta = 0$ для фрозара (76) и ЧД (77).

$$1 + z_{\text{фроз}} \simeq \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{r_{gP}}{r} \right)^{-1/2} \left(1 - \frac{a^2 + Q^2}{r_{gP} r} \right)^{-1/2}, \quad (76)$$

$$1 + z_{\text{ЧД}} \simeq \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{r_{gEQ}}{r} + \frac{a^2 + Q^2}{r^2} \right)^{-1/2}. \quad (77)$$

На Рис. 18 приведены соответствующие графики зависимости $1 + z$ от a и Q .

Итак, увеличение a и/или Q в случае фрозара уменьшает $g_{00}^{1/2}(r, \theta)$, т. е. усиливает гравитацию источника, увеличивая степень замедления собственного времени и величину красных смещений. В теории ЧД с условием $r_{gEQ} = \text{const}$ наоборот, рост a и/или Q увеличивает $g_{00}^{1/2}(r, \theta)$, ослабляя гравитацию источника, а значит уменьшает степень замедления собственного времени и величину красных смещений.

5. Заключение

Метрика вне заряженного пылевого шара в системе покоя его центра является статической и следует из уравнений Эйнштейна на гиперповерхностях одновременности $t = \text{const}$. Она была получена ранее [11,12] в предположении о распределении заряда во всём объёме шара. Однако, во-первых, в этом случае масса шара зависит от заряда и в метрику входит параметр, зависящий от другого параметра, а во-вторых, в реальном шаре заряды быстро соберутся на поверхности.

В связи с этими сложностями прежней модели шара с объёмным зарядом в статье [1] была рассмотрена более простая и реалистичная модель шара с зарядом на поверхности радиуса r_b . В этой модели масса вещества шара M и его гравитационный радиус $r_g = 2GM / c^2$ не зависят от заряда Q . В полученной метрике с независимыми параметрами r_b , r_g и Q вклад энергии электрического поля имеет тот же знак, что и вклад вещества и поэтому не ослабляет, а усиливает гравитацию вне шара. В результате усиливаются и эффекты гравитации, в частности, с ростом Q будут увеличиваться красные смещения, радиусы орбит и тени (когда r_b меньше радиуса тени).

В теории гравитации Эйнштейна коллапс пылевого шара, согласно решению Оппенгеймера-Снайдера [15] в терминах t , ведёт к образованию фрозара, звезды с гравитационно-застывшей структурой и с поверхностью у гравитационного радиуса вещества $r_b \rightarrow r_g$ [10,16]. В [1] было показано, что метрика для заряженного фрозара следует из метрики заряженного шара при $r_b \rightarrow r_g$. При этом из трёх параметров метрики шара в метрике фрозара останутся лишь два, r_g и Q . Наблюдаемые следствия метрики фрозара такие же, как и для шара, но с $r_b \simeq r_g$.

В статье [2] развитый в [1] метод приведения метрики к независимым параметрам был применён также и к источникам с угловым моментом. Стандартная форма метрики вне вращающегося источника, как нейтрального (Керра), так и заряженного (КН), включает три параметра и один из них, гравитационный радиус на экваторе r_{gEQ} , зависит от двух других a и Q . В [2] эти метрики были приведены к форме с независимыми параметрами, в которых r_{gEQ} был заменён на гравитационный радиус нейтральной невращающейся материи r_{gP} , не зависящий от a и Q .

Это позволило исключить прежние нефизические предсказания теории ЧД, будто рост параметра вращения a и/или заряда Q ослабляет гравитацию вне источника с предсказанием ослабления физических эффектов гравитации [9,14,17]. Вместо них теория фрозаров, из которой метрики с независимыми параметрами следуют естественно, предсказывает обратное, что рост a и/или Q , добавляя положительную энергию вращения и/или электрического поля, усиливает гравитацию и увеличивает величину её эффектов.

В данной статье был дан краткий обзор результатов статей [1,2] и приведены следствия для некоторых наблюдаемых эффектов, в частности, замедлений времени, красных смещений и теней. Более детальное изучение следствий метрик с независимыми параметрами и их дальнейшие применения будут приведены в книге [10].

Приложение. Тень вращающегося коллапсара

В метрике Керра светоподобные уравнения геодезических сепарабельны и их решение упрощается наличием четырёх констант движения – массы покоя фотона (равной нулю), энергии E , углового момента L и постоянной Картера Q [9]. Координаты (x, y) края тени на плоскости изображения, видимые удалённым наблюдателем на экваториальной плоскости, связаны с этими константами как [18]:

$$x \simeq -\frac{L}{E}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{Q}}{E}. \quad (78)$$

Для сферической орбиты фотона радиуса r они удовлетворяют соотношениям:

$$x = \frac{r^3 + a^2 r + (a^2 - 3r^2)r_{gEQ} / 2}{a(r - r_{gEQ} / 2)}, \quad (79)$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{3r^2 + a^2 - x^2}{1 - a^2 / r^2}}. \quad (80)$$

Соотношение (79) представляет собой уравнение для r :

$$r^3 - (3r_{gEQ} / 2)r^2 + a(a - x)r + 3a(a + x)r_{gEQ} / 2 = 0, \quad (81)$$

которое можно решить тригонометрическим методом Виета. Введя обозначения

$$A(x) \equiv 1 - \frac{4a(a - x)}{3r_{gEQ}^2}, \quad B(x) \equiv \frac{2}{|A(x)|^{3/2}} \left(1 - \frac{4a^2}{r_{gEQ}^2} \right), \quad (82)$$

решение можно записать в виде [18] $r(x) = \tilde{r}(x)r_{gEQ} / 2$, где

$$\tilde{r}(x) = 1 + 2\sqrt{A} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos B\right), \quad A > 0, \quad B \leq 1, \quad (83)$$

$$\tilde{r}(x) = 1 + 2\sqrt{A} \cosh\left(\frac{1}{3} \ln\left(\sqrt{B^2 - 1} + B\right)\right), \quad A \geq 0, \quad B > 1, \quad (84)$$

$$\tilde{r}(x) = 1 - 2\sqrt{|A|} \sinh\left(\frac{1}{3} \ln\left(\sqrt{B^2 + 1} - B\right)\right), \quad A < 0. \quad (85)$$

Для получения контура тени при данном x вычисляется $r(x)$ из (83)-(85), выражаем r_{gEQ} через r_{gP} согласно (56) и, подставляя результат в (80), находим $y(x)$.

Литература

- Закир З. (2022) *Квант. и грав. физ.*, **3**:016-7694.
- Закир З. (2022) *Квант. и грав. физ.*, **3**:017-7694.
- Reissner H. (1916) *Ann. d. Phys.*, **50**, 106.
- Weyl H. (1917) *Ann. Phys.*, **359**(18), 117.
- Nordström G. (1918) *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, **20**, 1238.
- Kerr R. (1963) *Phys. Rev. Lett.*, **5**, 1.
- Boyer R., Lindquist R. (1967) *J. Math. Phys.* **8**, 265.
- Newman E., Couch E., Chinnaparet K. et al (1965) *J. Math. Phys.* **6**, 918.
- Bambi C. (2017) *Black Holes: A Lab. for Testing Strong Gravity*. Springer.
- Закир З. (2020) *Теория фрозаров. Релятивистский коллапс звезд*. ЦТФА, Т.
- Bonnor W. (1960) *Z. Phys.*, **160**, 59;
- Florides P. (1960) *PhD Thesis*, U. London; (1962) *Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.* **58**(1) 110; (1977) *Nuov. Cim.*, **A42**(3), 343.
- Christodoulou D., Ruffini R. (1971) *Phys. Rev.*, **D4**, 3552.
- Pugliese D., Quevedo H., Ruffini R. (2011) *Phys. Rev.* **D83**(2), 024021.
- Oppenheimer R., Snyder H. (1939) *Phys. Rev.* **56**(1), 455.
- Zakir Z. (2018) *Astr. & Space Sci.* **363**: 30; (2020) *Квант. и грав. физ.*, **1**:006-7132; **1**:007-7133
- Bardeen J., Press W., Teukolsky S. (1972) *Astrophys. J.* **178**, 347.
- Cunha P. V., Herdeiro C. A. (2018) *Gen. Rel. & Grav.*, **50**(4), 1.