

## Метрики с неприводимой массой ведущие к корректной зависимости от параметров эффектов гравитации вокруг заряженных и вращающихся тел

Захид Закир<sup>1</sup>

### Аннотация

Стандартные метрики вокруг заряженных и вращающихся источников (Керра-Ньюмана в общем, Рейсснера-Нордстрёма и Керра в частности) содержат полную массу на бесконечности, которая включает как массу нейтрального невращающегося тела, так и масс-эквиваленты энергий вращения и электрического поля. Поэтому полная масса растёт с ростом углового момента и заряда. Однако при изучении зависимости эффектов гравитации от параметров этот факт игнорировался, полагая полную массу постоянной при меняющихся угловом моменте и заряде. Эта ошибка привела к физически абсурдным предсказаниям об ослаблении гравитации и её эффектов при росте энергий вращения и электрического поля. Для исключения таких ошибок полная масса должна быть выражена через независимые параметры - массу нейтрального невращающегося вещества источника, заряд и угловой момент. Недавно это было сделано используя как независимый параметр массу, определяемую из гравитационного радиуса на полюсе, когда заряд находится только на поверхности (Закир, 2022). В данной статье используется «неприводимая масса», которая определялась ранее эвристически как остаток полной массы после удаления углового момента и заряда. Массовая формула, выражающая полную массу через неприводимую массу, ранее была найдена Флоридесом (1960) (уточнена автором (2022)) для заряженного тела, Кристоделу (1970) для вращающегося и Кристоделу-Руффини (1971) для заряженного вращающегося источников. В статье стандартные метрики преобразованы в метрики с независимыми параметрами путём подстановки выражения для полной массы согласно этим массовым формулам. Показано, что метрики в этой форме ведут к физически корректной зависимости эффектов гравитации от параметров, в частности, рост энергий вращения и электрического поля усиливает гравитацию и её эффекты, такие как замедление времени и красные смещения, увеличивает радиусы орбит и площадь тени.

*Ключевые слова:* полная масса, заряд, угловой момент, метрика Рейсснера-Нордстрёма, метрика Керра, метрика Керра-Ньюмана, массовая формула, красные смещения, фотонная орбита, орбиты частиц, тень

### Содержание

|                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. ВВЕДЕНИЕ .....                                                         | 2  |
| 2. МЕТРИКА С НЕПРИВОДИМОЙ МАССОЙ ВНЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ТЕЛ И ЕЁ СЛЕДСТВИЯ .....  | 3  |
| 2.1. Метрика Рейсснера-Нордстрёма в терминах неприводимой массы .....     | 3  |
| 2.2. Корректная зависимость эффектов гравитации от заряда источника ..... | 4  |
| 3. МЕТРИКА КЕРРА В ТЕРМИНАХ НЕПРИВОДИМОЙ МАССЫ И ЕЁ СЛЕДСТВИЯ .....       | 7  |
| 3.1. Метрика Керра в терминах неприводимой массы .....                    | 7  |
| 3.2. Эффекты гравитации в метрике Керра с неприводимой массой .....       | 9  |
| 4. МЕТРИКА КЕРРА-НЬЮМАНА С НЕПРИВОДИМОЙ МАССОЙ И ЕЁ СЛЕДСТВИЯ .....       | 14 |
| 4.1. Метрика Керра-Ньюмана с неприводимой массой .....                    | 14 |
| 4.2. Замедление собственного времени и красные смещения .....             | 15 |
| 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....                                                       | 16 |
| ЛИТЕРАТУРА .....                                                          | 17 |

<sup>1</sup> *Центр теоретической физики и астрофизики, Ташкент Узбекистан, [zzakir@ggph.uz](mailto:zzakir@ggph.uz) ORCID*

## 1. Введение

Стандартные метрики вне источников гравитации, Рейсснера-Нордстрёма (РН) для заряженного, Керра для нейтрального вращающегося и Керра-Ньюмана (КН) для заряженного вращающегося источников, будучи точными решениями уравнений Эйнштейна, содержат как основной параметр полную массу источника  $M$ , определяемую из совпадения с метрикой Шварцшильда при  $r \rightarrow \infty$  [1-5].

Но  $M$ , масс-эквивалент полной энергии в сфере бесконечного радиуса, содержит как массу нейтрального невращающегося источника  $M_0$ , так и масс-эквиваленты энергий вращения и электрического поля и поэтому  $M$  зависит от других параметров метрики - параметра вращения  $a$  (углового момента на единицу массы) и заряда  $Q$  тела.

Однако при изучении зависимости гравитационных эффектов от параметров этот факт было принято игнорировать, полагая  $M = \text{const}$  при меняющихся  $a$  и  $Q$ . Результатом этой ошибки стали физически абсурдные предсказания об ослаблении гравитации и её эффектов с добавлением энергий вращения и электрического поля [2-9].

В действительности  $M$  есть константа интегрирования только относительно координат, но является функцией от независимых параметров  $M_0$ ,  $a$  и  $Q$ . Стандартные метрики тем самым были решениями с точностью до некой функции  $M(M_0, a, Q)$ . Поэтому для полного решения задачи, исключающей указанные ошибки, надо было найти явный вид этой функции, после чего подстановка выражения  $M$  через  $M_0$ ,  $a$  и  $Q$  в стандартные метрики преобразует их в метрики с независимыми параметрами.

Задача нахождения метрик с независимыми параметрами была впервые поставлена и решена в простейших случаях в предыдущих статьях [10,11] (см. также [12]). В метрике КН масса  $M_0$  источника с зарядом на поверхности, в частности на поверхности бесконечного красного смещения, была отождествлена с массой  $M_+$ , следующей из гравитационного радиуса на полюсе  $r_+ = 2M_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$ . Выразив  $M$  через  $M_+$ ,  $a$  и  $Q$ , была найдена простая массовая формула:

$$M = M_+ + \frac{a^2 + Q^2}{4M_+}. \quad (1)$$

Выбор  $M_0 = M_+$  и подстановка (1) в метрику КН привели к физически корректным предсказаниям об усилении гравитации и её эффектов при росте  $a$  и  $Q$ .

Однако была ясна только независимость  $M_+$  от  $Q$ , тогда как независимость от  $a$  лишь предполагалась и не была доказана. В связи с этим представляет интерес изучение других возможностей определения  $M_0$ .

В данной статье будут изучены следствия отождествления  $M_0 = M_{ir}$ , где  $M_{ir}$  есть «неприводимая масса», определяемая обычно эвристически (используя специфические процессы) как остаток от полной массы после удаления углового момента и заряда. Массовая формула, выражающая  $M$  через  $M_{ir}$ , была предложена Флоридесом (1960) [13] (уточнена автором (2022) [10]) для заряженных тел, Кристоделу (1970) для нейтральных вращающихся [14] и Кристоделу-Руффини для заряженных вращающихся (1971) [15] источников. В статье будет использована массовая формула Кристоделу-Руффини:

$$M^2 = \left( M_{ir} + \frac{Q^2}{4M_{ir}} \right)^2 + \frac{J^2}{4M_{ir}^2}. \quad (2)$$

Подстановка выражения для углового момента источника  $J = Ma$  позволяет записать формулу (2) в виде  $M = f(M_{ir}, a, Q)$ , более удобном для применений:

$$M = M_{ir} \frac{1 + Q^2 / 4M_{ir}^2}{\sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}}. \quad (3)$$

При  $a = 0$  две формулы (1) и (3) совпадают в точности и в этом случае  $M_{ir} = M_+^{(Q)}$ , где  $2M_+^{(Q)} = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$ . При  $a^2 > 0$  имеем  $M_{ir}^2 = M_+^2 + a^2 / 4 > M_+^2$ , и при  $a \rightarrow 2M_{ir}$  зависимость  $M$  от  $a$  в (3) сингулярная, тогда как в (1) она регулярная.

Подстановка (3) в стандартную метрику КН преобразует её в метрику с независимыми параметрами  $M_{ir}$ ,  $a$  и  $Q$ . При изучении зависимости от  $a$  и  $Q$  свойств компактных источников и эффектов гравитации вокруг них эта форма метрики КН более корректна как с математической, так и с физической точек зрения.

В статье рассмотрены теоретические и наблюдательные следствия этой новой формы метрики КН. В разделах 2 и 3 рассмотрены следствия для частных случаев, метрик РН и Керра, а в разделе 4 обсуждаются следствия полной метрики КН.

## 2. Метрика с неприводимой массой для заряженных тел и её следствия

### 2.1. Метрика Рейсснера-Нордстрёма в терминах неприводимой массы

Пространственно-временной интервал вне сферически-симметричного тела с зарядом  $Q$  в системе покоя его центра даётся метрикой РН:

$$ds^2 = g_{00}(r)c^2 dt^2 + g_{11}(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4)$$

$$g_{00} = -g_{11}^{-1} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \equiv f(r). \quad (5)$$

Здесь полная масса  $M$  совпадает с шварцшильдовской массой в асимптотике  $r \rightarrow \infty$  и поэтому включает не только массу нейтрального тела  $M_0$  (которую в данной статье отождествим с неприводимой массой  $M_0 = M_{ir}$ ), но и масс-эквивалент энергии электрического поля (пропорциональная  $Q^2$ ) в сфере бесконечного радиуса. Поэтому  $M$  зависит от  $Q$  и эту зависимость найдём из массовой формулы (3) при  $J = a = 0$ :

$$M = M_{ir} + \frac{Q^2}{4M_{ir}}. \quad (6)$$

Подстановка (6) в (5) даёт для временной и радиальной компонент метрики:

$$g_{00} = -g_{11}^{-1} = 1 - \frac{2M_{ir} + Q^2 / 2M_{ir}}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 1 - \frac{2M_{ir}}{r} - \frac{Q^2}{2M_{ir}r} \left( 1 - \frac{2M_{ir}}{r} \right), \quad (7)$$

или в более компактной форме:

$$g_{00} = -g_{11}^{-1} = \left(1 - \frac{2M_{ir}}{r}\right) \left(1 - \frac{Q^2}{2M_{ir}r}\right). \quad (8)$$

Итак, метрика РН в терминах неприводимой массы (7)-(8) принимает форму метрики с независимыми параметрами  $M_{ir}$  и  $Q$ . В области  $r > 2M_{ir} > Q$  эта форма метрики РН не имеет особенностей.

В стандартной метрике РН (5) знак электрического члена  $+Q^2/r^2$  положительный и обратный знаку шварцшильдовского члена  $-2M/r$  и поэтому рост  $Q$  при условии  $M = const$  увеличивает  $g_{00}$ , что означает ослабление гравитации и её эффектов [6,7].

Напротив, в метрике РН с независимыми параметрами (7), содержащей независимый параметр  $M_{ir}$  вместо зависимого  $M$ , скобка в (7) положительна вне источника  $r > 2M_{ir} > Q$  и поэтому вклад в метрику энергии электрического поля, даваемый членом с  $Q^2$ , того же знака, что и вклад энергии нейтрального вещества, даваемого  $2M_{ir}/r$ . В результате, рост  $Q$  усиливает гравитацию и её наблюдаемые эффекты и эти корректные с физической точки зрения зависимости от  $Q$  приведены в разделе 2.2.

Для нейтральной пробной частицы движущейся на экваториальной плоскости и имеющей массу  $\mu$ , энергию  $E$  и угловой момент  $L$ , уравнение движения имеет вид:

$$\dot{r}^2 = \frac{E^2}{\mu^2} - V^2, \quad (9)$$

где эффективный потенциал  $V$ , с учётом (8), имеет вид ( $k = 0, \pm 1$ ):

$$V^2 = \left(k + \frac{L^2}{\mu^2 r^2}\right) \left(1 - \frac{2M_{ir}}{r}\right) \left(1 - \frac{Q^2}{2M_{ir}r}\right). \quad (10)$$

Здесь также явно видно, что рост  $Q$  понижает эффективный потенциал, усиливая гравитационное притяжение к источнику и при этом вклад в  $V$  энергии электрического поля имеет такой же вид, как и вклад энергии покоя нейтрального тела.

## 2.2. Корректная зависимость эффектов гравитации от заряда источника

Интервал собственного времени между двумя событиями  $\Delta\tau = g_{00}^{1/2}(r)\Delta t$  для пробной частицы, которая покоится вблизи источника в точке  $(r, \theta, \varphi) = const$ , меньше интервала  $\Delta t$  между этими же событиями по удалённым часам. Это - гравитационное замедление собственных времён, которое для двух форм метрики РН (5) и (8) имеет вид:

$$\Delta\tau^{(a)} = \Delta t \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{1/2}, \quad (11)$$

$$\Delta\tau^{(b)} \simeq \Delta t \left(1 - \frac{2M_{ir}}{r}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{Q^2}{2M_{ir}r}\right)^{1/2}. \quad (12)$$

Как показывает Рис. 1, рост  $Q$  в (11) при условии  $M = \text{const}$  ведёт к увеличению  $g_{00}^{1/2}(r)$ , т.е. *ослабляет* гравитацию и эффект замедления времени. Обратная ситуация имеет место в (12), где рост  $Q$  уменьшает  $g_{00}^{1/2}(r)$ , т.е. *усиливает* гравитацию и эффект замедления времени.

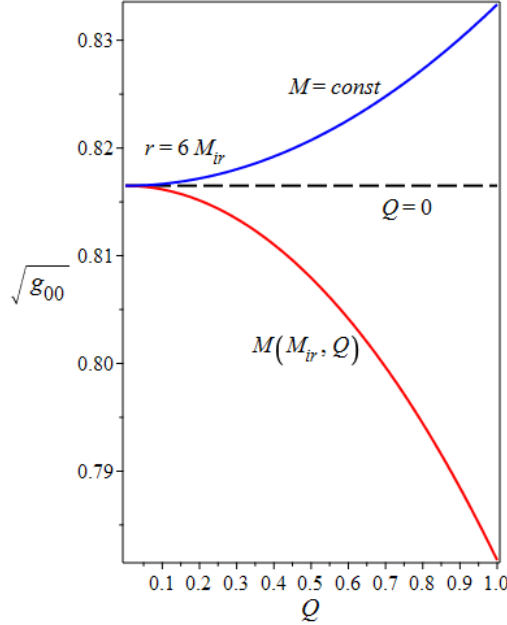


Рис. 1. Зависимость от  $Q$  замедления времени,  $r = 6M_{ir}$ .

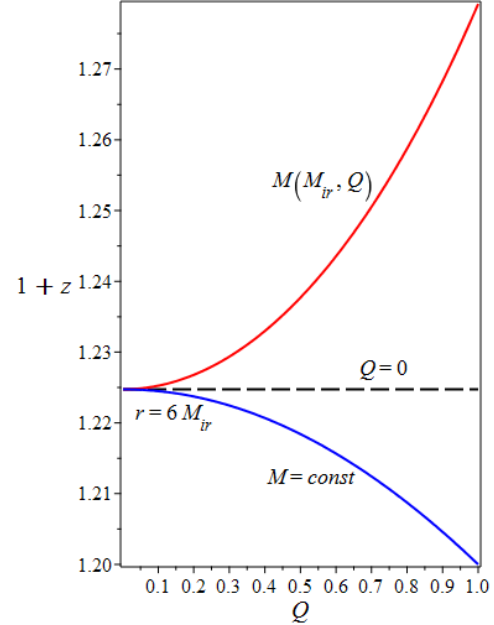


Рис. 2. Зависимость от  $Q$  красного смещения,  $r = 6M_{ir}$ .

Гравитационное красное смещение следует из гравитационного замедления собственных времени. Частота  $\omega$  (в терминах  $t$ ) фотонов от источника, покоящегося в точке  $(r, \theta, \varphi)$  вблизи коллапсара, при принятии вдали будет меньше частоты  $\omega_0$  местных фотонов испущенных у наблюдателя:  $\omega < \omega_0$ . Фактор красного смещения  $1 + z = \omega_0 / \omega = g_{00}^{-1/2}$  в двух рассматриваемых случаях даётся выражениями:

$$1 + z^{(a)} = \frac{\omega_0}{\omega} = \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1/2}, \quad (13)$$

$$1 + z^{(b)} = \frac{\omega_0}{\omega} = \left( 1 - \frac{2M_{ir}}{r} \right)^{-1/2} \left( 1 - \frac{Q^2}{2M_{ir}r} \right)^{-1/2}. \quad (14)$$

Как показывает Рис. 2, с ростом  $Q$  эффект гравитационного красного смещения уменьшается в случае (13) и увеличивается в случае (14).

Уравнения движения в метрике РН (5) и их решения для геодезических траекторий, особенно для нескольких выделенных орбит и тени, хорошо известны (см. [1-7]). Соответствующие формулы для новой формы этой метрики с независимыми параметрами (8) следуют из них при подстановке вместо  $M$  её выражения через  $M_{ir}$  и

$Q$  из массовой формулы (6). По этой причине достаточно привести лишь результаты для прежних и новых зависимостей от  $Q$ .

Формулы для радиуса фотонной орбиты,  $r_{ph}^{(a)}$  в терминах  $M$  и затем  $r_{ph}^{(b)}$  в терминах  $M_{ir}$ , имеют вид:

$$r_{ph}^{(a)} = \frac{3}{2}M \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{8Q^2}{9M^2}} \right), \quad (15)$$

$$r_{ph}^{(b)} = \frac{3}{2} \left( M_{ir} + \frac{Q^2}{4M_{ir}} \right) \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{8Q^2}{9(M_{ir} + Q^2/4M_{ir})^2}} \right). \quad (16)$$

Для радиуса низшей стабильной орбиты массивной частицы  $r_{ISCO}$  имеем:

$$r_{ISCO}^{(a)} = M \left[ 2 + \xi + \frac{1}{\xi} \left( 4 - \frac{3Q^2}{M^2} \right) \right], \quad (17)$$

$$r_{ISCO}^{(b)} = \left( M_{ir} + \frac{Q^2}{4M_{ir}} \right) \left[ 2 + \xi + \frac{1}{\xi} \left( 4 - \frac{3Q^2}{(M_{ir} + Q^2/4M_{ir})^2} \right) \right], \quad (18)$$

$$\xi = \left[ 8 + \frac{2Q^4}{M^4} - \frac{Q^2}{M^2} \left( 9 - \sqrt{\left( 1 - \frac{Q}{M} \right) \left( 5 - \frac{4Q}{M} \right)} \right) \right]^{1/3}. \quad (19)$$

При этом в формуле (18) для  $\xi$  из (19) вместо  $M$  подставляется её выражение (6).

Для радиуса тени заряженного коллапсара  $\lambda_c = r_{ph} g_{00}^{-1/2}(r_{ph})$ , подставив  $g_{00}$  из (5) и (8) с  $r_{ph}$  из (15)-(16), получаем формулы:

$$\lambda_c^{(a)} = \frac{3}{2}M \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - 8Q^2/9M^2}}{\sqrt{1 - 2M/r_{ph} + Q^2/r_{ph}^2}}. \quad (20)$$

$$\lambda_c^{(b)} = \frac{3}{2} \left( M_{ir} + \frac{Q^2}{4M_{ir}} \right) \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - 8Q^2/9(M_{ir} + Q^2/4M_{ir})^2}}{\sqrt{(1 - 2M_{ir}/r_{ph})(1 - Q^2/2M_{ir}r_{ph})}}. \quad (21)$$

Новые кривые зависимости от  $Q$  радиусов орбит  $r_{ph}^{(b)}$ ,  $r_{ISCO}^{(b)}$  и тени  $\lambda_c^{(b)}$  идут вверх (Рис. 3), так как с усилением гравитации источника из-за роста энергии электрического поля устойчивые орбиты располагаются на большем удалении от источника. В противоположность этому прежние кривые для  $r_{ph}^{(a)}$ ,  $r_{ISCO}^{(a)}$  и  $\lambda_c^{(a)}$  (при условии  $M = const$ ) идут вниз (Рис. 4), что с физической точки зрения абсурдно. Более наглядная картина поведения тени приведена на Рис. 5.

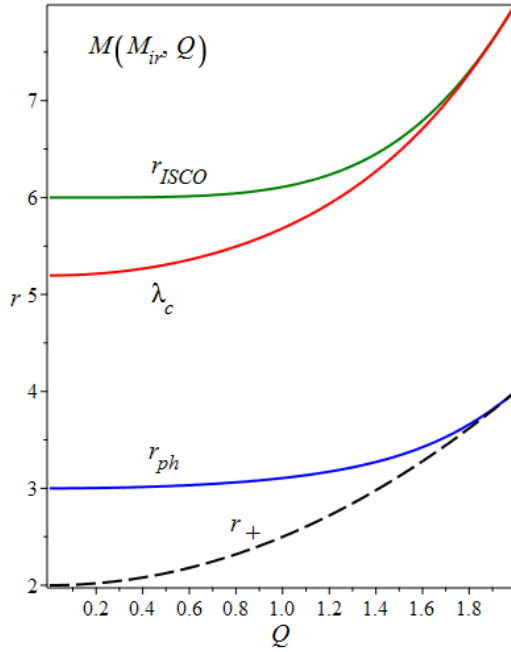


Рис. 3. Зависимость от заряда радиусов орбит и тени в метрике ПН с неприводимой массой.

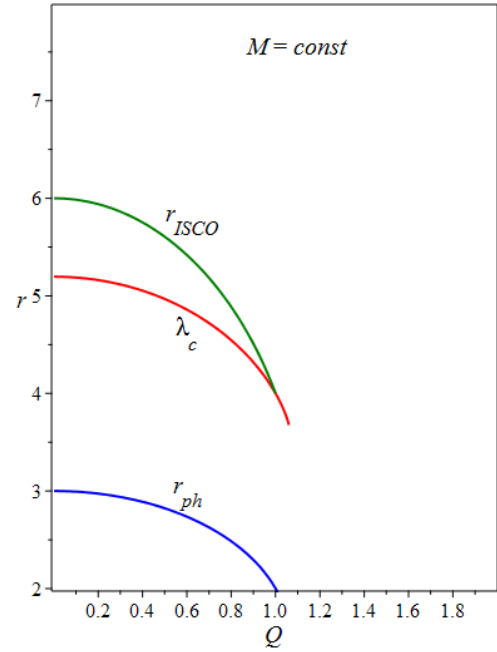


Рис. 4. Зависимость от заряда радиусов орбит и тени в стандартной метрике ПН с  $M = const$ .

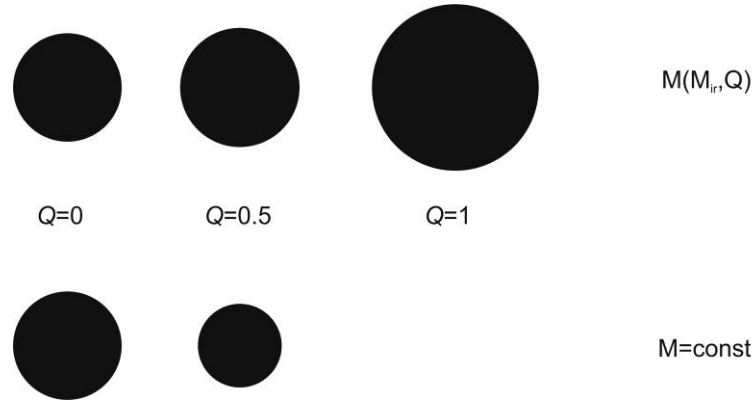


Рис. 5. Зависимость от заряда тени заряженного коллапсара в двух подходах.

### 3. Метрика Керра в терминах неприводимой массы и её следствия

#### 3.1. Метрика Керра в терминах неприводимой массы

Линейный элемент вокруг компактного вращающегося источника с аксиальной симметрией, ось которого направлена вдоль  $\theta = 0$ , принимает вид:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\phi^2 + 2g_{03}dtd\phi, \quad (22)$$

где  $t$  - мировое время и метрика имеет вид  $g_{\mu\nu}(r, \theta)$ . Стандартная форма метрики Керра ведёт к подобному линейному элементу в координатах Бойера-Линдквиста:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{\rho^2} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{4Mra}{\rho^2} \sin^2 \theta d\varphi dt, \quad (23)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 + a^2 - 2Mr, \quad (24)$$

На экваториальной плоскости ( $\theta = \pi/2$ ,  $\rho^2 = r^2$ ) (23) упрощается:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{r^2}{\Delta} dr^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) d\varphi^2 + \frac{4Ma}{r} d\varphi dt. \quad (25)$$

На полюсе ( $\theta = 0, \pi$ ;  $\rho^2 = r^2 + a^2$ ) (23) принимает ещё более простой вид:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2 + a^2} dt^2 - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr^2. \quad (26)$$

В метрике Керра  $Q = 0$  и массовая формула (3) принимает вид:

$$M = \frac{M_{ir}}{\sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}} \simeq M_{ir} + \frac{a^2}{8M_{ir}} + \dots \quad (27)$$

Здесь  $M$  включает как  $M_{ir}$ , так и масс-эквивалент энергии вращения. Графики зависимости от  $a$  полной массы  $M$  и углового момента  $J = Ma$  согласно (27) приведены на Рис. 6-7. В рисунках и далее  $a$ ,  $Q$  и  $M$  даны в единицах  $M_{ir}$ .

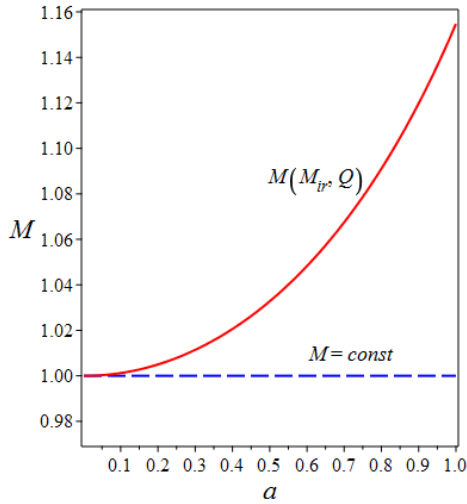


Рис. 6. Зависимость от  $a$  полной массы  $M$ .

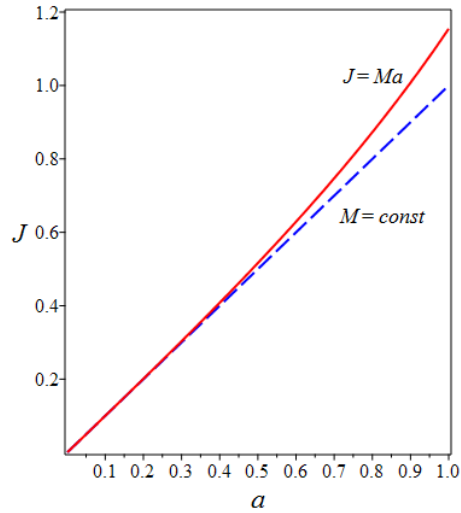


Рис. 7. Зависимость от  $a$  углового момента.

Таким образом, стандартная форма метрики Керра (23) включает  $M$  как основной параметр, но этот параметр зависит от  $a$ , другого параметра метрики. Массовая формула (27) позволяет выразить  $M$  через независимые параметры  $M_{ir}$ ,  $a$ , и это преобразует

метрику Керра в метрику с независимыми параметрами. При этом линейный элемент (23) приобретает вид:

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2rM_{ir}}{\rho^2 \sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}} \right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta_{ir}} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left( r^2 + a^2 + \frac{2M_{ir}ra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}} \right) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{4M_{ir}ra \sin^2 \theta}{\rho^2 \sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}} d\varphi dt, \quad (28)$$

$$\Delta_{ir} = r^2 + a^2 - \frac{2rM_{ir}}{\sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}}, \quad (29)$$

На экваториальной плоскости (28) переходит в:

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2M_{ir}}{r\sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}} \right) dt^2 - \frac{r^2}{\Delta_{ir}} dr^2 - \left( r^2 + a^2 + \frac{2M_{ir}a^2}{r\sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}} \right) d\varphi^2 + \frac{4M_{ir}a}{r\sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}} d\varphi dt, \quad (30)$$

а на полюсе:

$$ds^2 = \frac{\Delta_{ir}}{r^2 + a^2} dt^2 - \frac{r^2 + a^2}{\Delta_{ir}} dr^2. \quad (31)$$

При  $r > 2M$  и  $a < 2M_{ir}$  метрики (29)-(31) не имеют особенностей.

Ранее при изучении зависимости от  $a$  наблюдаемых эффектов в гравитационном поле вращающегося источника ошибочно полагалась  $M = \text{const}$  при меняющемся  $a$ . Это затем вело к абсурдному предсказанию, будто добавление энергии вращения ослабляет гравитацию и её эффекты [2-5,8-9].

В противоположность этому, метрике с независимыми параметрами в (29) показывает, что в действительности рост  $a$ , ведущий к увеличению  $M$  за счёт вклада энергии вращения, уменьшает  $g_{00}$  и тем самым усиливает гравитацию. В результате её наблюдаемые эффекты, такие как красные смещения, средние радиусы орбит и теней, растут с ростом  $a$ .

Итак, переход к метрике Керра с неприводимой массой  $M_{ir}$  (28), осуществляемый путём подстановки (27) в (23), исправляет прежние ошибки и делает предсказания физически корректными. Соответствующие формулы и графики для наблюдаемых эффектов приведены в разделе 2.2.

### 3.2. Эффекты гравитации в метрике Керра с неприводимой массой

Уравнения и интегралы движения в стандартной метрике Керра (23) с  $M$  вместе с формулами для радиусов специальных орбит хорошо известны и приведены в [2-5,8-9]. Для получения соответствующих формул для метрики Керра с неприводимой массой (28) достаточно сделать замену (27) в формулах для наблюдаемых эффектов. Ниже приведены новые зависимости от  $a$  следующие из такой замены.

*а. Замедление времени и красные смещения.*

Гравитационное замедление времени в точке  $(r, \theta, \varphi) = \text{const}$ , т.е. замедление собственного времени  $\tau$  по отношению к  $t$ , даётся формулой  $\Delta\tau = \Delta t g_{00}^{1/2}(r, \theta)$ . Для двух случаев, (а) прежнего выбора  $M = \text{const}$  и (б) при выборе  $M(M_{ir}, Q)$  это даёт:

$$\Delta\tau^{(a)} \simeq \Delta t \left( 1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right)^{1/2}, \quad M = \text{const}. \quad (32)$$

$$\Delta\tau^{(b)} \simeq \Delta t \left( 1 - \frac{2M_{ir}r}{\rho^2 \sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}} \right)^{1/2}, \quad (33)$$

На экваторе ( $\theta = \pi/2$ ) эти формулы сводятся к:

$$\Delta\tau^{(a)} \simeq \Delta t \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{1/2}, \quad M = \text{const}. \quad (34)$$

$$\Delta\tau^{(b)} \simeq \Delta t \left( 1 - \frac{2M_{ir}}{r \sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}} \right)^{1/2}, \quad (35)$$

а на полюсе ( $\theta = 0$ ):

$$\Delta\tau^{(a)} \simeq \Delta t \left( 1 - \frac{2M/r}{1 + a^2/r^2} \right)^{1/2}, \quad \Delta\tau^{(b)} \simeq \Delta t \left( 1 - \frac{2M_{ir}/r}{(1 + a^2/r^2) \sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}} \right)^{1/2}. \quad (36)$$

Рис. 8 показывает различие зависимостей от  $a$  в этих двух случаях.

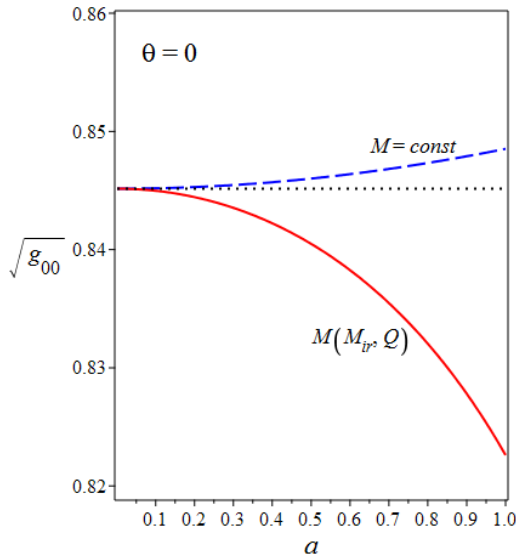


Рис. 8а. Зависимость от  $a$  замедления времени на полюсах,  $r = 6M_{ir}$ .

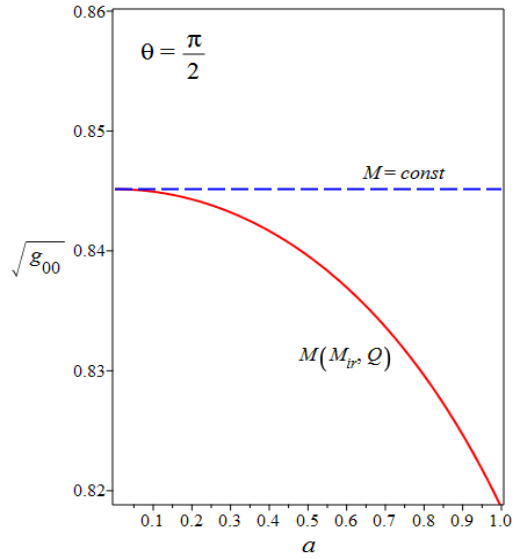


Рис. 8б. Зависимость от  $a$  замедления времени на экваторе,  $r = 6M_{ir}$ .

Зависимость от  $a$  фактора красного смещения  $1+z = \Delta t / \Delta \tau = g_{00}^{-1/2}$  обратна зависимости замедления времени и приведена на Рис. 9.

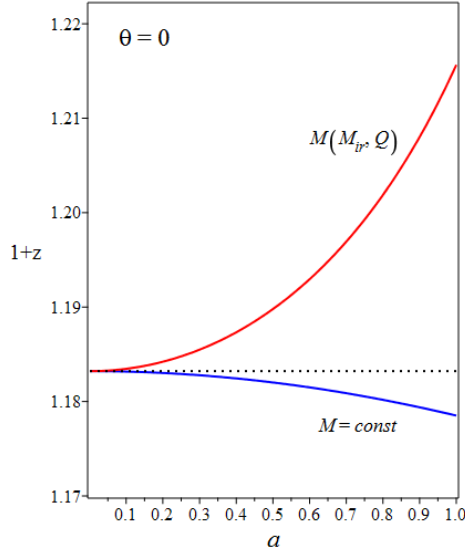


Рис. 9а. Зависимость от  $a$  красного смещения на полюсах,  $r = 6M_{ir}$ .

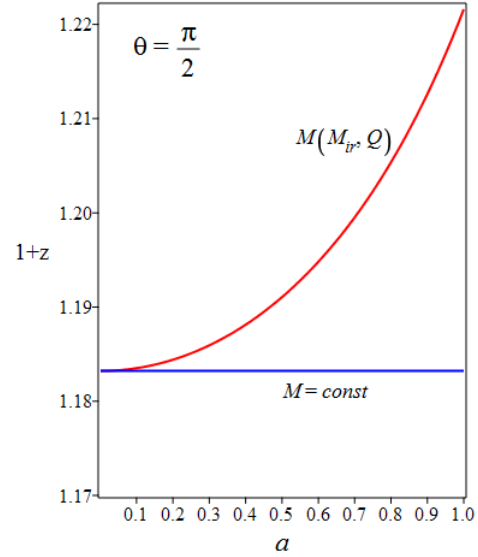


Рис. 9б. Зависимость от  $a$  красного смещения на экваторе,  $r = 6M_{ir}$ .

б. Радиусы орбит фотонов и массивных частиц.

Радиусы круговой орбиты фотонов  $r_{ph\pm}$  в двух направлениях вращения на орбите равны:

$$r_{ph\mp}^{(a)} = 2M \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{2}{3} \arccos \left( \mp \frac{a}{M} \right) \right] \right\}, \quad (37)$$

$$r_{ph\mp}^{(b)} = \frac{2M_{ir}(1 + \cos F)}{\sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}}, \quad (38)$$

где

$$F = \frac{2}{3} \arccos \left( \mp \frac{a}{M_{ir}} \sqrt{1 - \frac{a^2}{4M_{ir}^2}} \right).$$

Соответствующие графики зависимости от  $a$  радиусов  $r_{ph}$  и их среднего  $r_{ph0} = (r_{ph+} + r_{ph-}) / 2$  (где эффект увлечения компенсирован) приведены на Рис. 10. Из графиков видно, что при  $M = const$  средний радиус  $r_{ph0}^{(a)}$  уменьшается с ростом  $a$ , тогда как в случае  $M(M_{ir}, Q)$  средний радиус  $r_{ph0}^{(b)}$  увеличивается с ростом  $a$ .

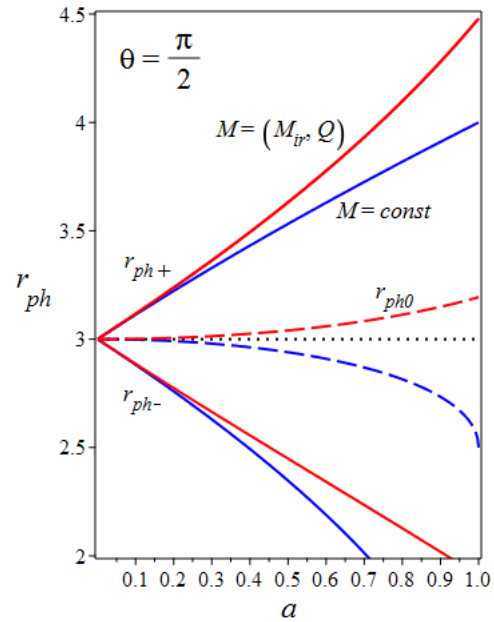


Рис. 10. Радиусы фотонных орбит  $r_{ph\pm}$  и  $r_{ph0}$ .

в. Предельные радиусы орбит связанного состояния.

Формулы для  $r_{mb\pm}$  с  $M$

$$r_{mb\mp}^{(a)} = 2M \left( 1 + \sqrt{1 \mp \frac{a}{M}} \right) \mp a, \quad (39)$$

$$r_{mb\mp}^{(b)} = \frac{2M_{ir}}{\sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}} \left( 1 + \sqrt{1 \mp \frac{a}{M_{ir}} \sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}} \right) \mp a, \quad (40)$$

Графики для радиусов  $r_{mb\pm}$  и их среднего  $r_{mb0} = (r_{mb-} + r_{mb+}) / 2$  приведены на Рис. 11.

г. Радиусы низших стабильных орбит частиц.

Формула для радиуса низшей стабильной орбиты  $r_{ISCO\pm}$  имеет вид:

$$r_{ISCO\mp}^{(a)} = M \{ 3 + Z_2 \mp [(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)]^{1/2} \}, \quad (41)$$

$$Z_1 = 1 + (1 - b^2)^{1/3} [(1 + b)^{1/3} + (1 - b)^{1/3}], \quad Z_2 = (3b^2 + Z_1^2)^{1/2}. \quad (42)$$

Здесь при  $M = const$  будет  $b^{(a)} = a / M$  и при выражении  $M$  через неприводимую массу формула (41) переходит в:

$$r_{ISCO\mp}^{(b)} = \frac{M_{ir}}{\sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}} \{ 3 + Z_2 \mp [(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)]^{1/2} \}, \quad (43)$$

$$b^{(b)} = \frac{a}{M_{ir}} \sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2},$$

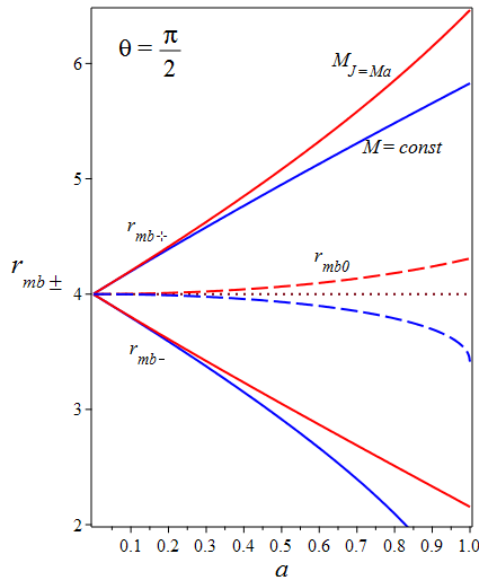


Рис. 11. Предельные радиусы орбиты связанного состояния  $r_{mb\pm}$  и их среднее  $r_{mb0}$  в метрике Керра.

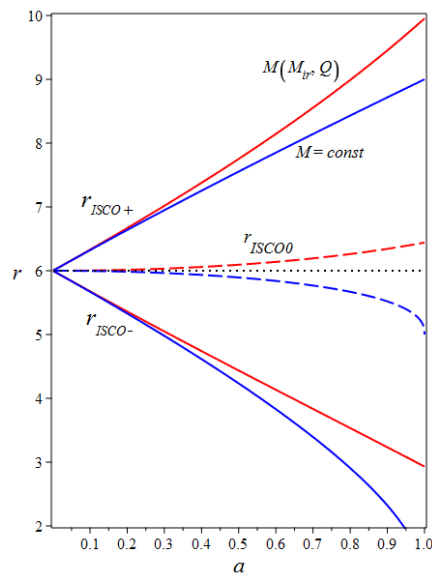


Рис. 12. Радиусы низших стабильных круговых орбит частиц  $r_{ISCO\pm}$  и их среднее  $r_{ISCO0}$  в метрике Керра.

Графики для  $r_{ISCO\pm}$  и  $r_{ISCO0} = (r_{ISCO+} + r_{ISCO-}) / 2$  приведены на Рис. 12.

д. Тень вращающегося коллапсара.

В метрике Керра светоподобные уравнения геодезических сепарабельны и их решение упрощается наличием четырёх констант движения – массы покоя фотона (равной нулю), энергии  $E$ , углового момента  $L$  и постоянной Картера  $K$ . Координаты  $(x, y)$  края тени на плоскости изображения, видимые издали на экваториальной плоскости, связаны с этими константами как  $x \simeq -L/E$  и  $y = \pm \sqrt{K}/E$ . Для сферической орбиты фотона радиуса  $r$  они удовлетворяют соотношениям:

$$x = \frac{r^3 + a^2 r + (a^2 - 3r^2)M}{a(r - M)}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{3r^2 + a^2 - x^2}{1 - a^2/r^2}}. \quad (44)$$

Первое соотношение (44) представляет собой уравнение для  $r$ :

$$r^3 - 3Mr^2 + a(a - x)r + Ma(a + x) = 0, \quad (45)$$

которое можно решить тригонометрическим методом Виета [16]. Введя обозначения

$$A(x) \equiv 1 - \frac{a(a - x)}{3M^2}, \quad B(x) \equiv \frac{1}{|A(x)|^{3/2}} \left( 1 - \frac{a^2}{M^2} \right), \quad (46)$$

решение можно записать в виде  $r(x) = M \cdot \tilde{r}(x)$ , где

$$\tilde{r}(x) = 1 + 2\sqrt{A} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos B\right), \quad A > 0, \quad B \leq 1, \quad (47)$$

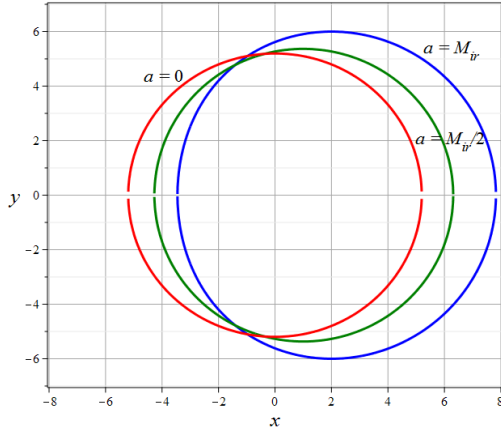


Рис. 13. Контур тени вращающегося коллапсара в метрике Керра с неприводимой массой,  $a = (0; 0.5; 1)M_{ir}$ .

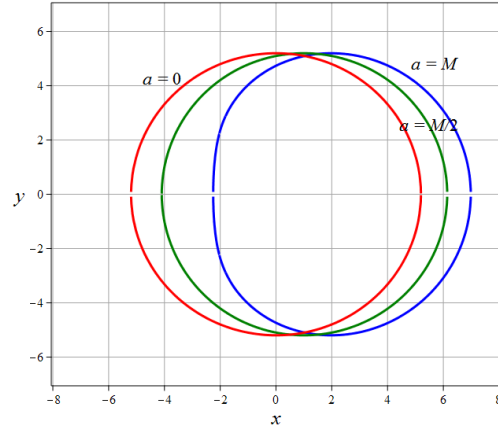


Рис. 14. Контур тени вращающегося коллапсара в стандартной метрике Керра и  $M = const$ ,  $a = (0; 0.5; 1)M_{ir}$ .

$$\tilde{r}(x) = 1 + 2\sqrt{A} \cosh\left(\frac{1}{3} \ln\left(\sqrt{B^2 - 1} + B\right)\right), \quad A \geq 0, \quad B > 1, \quad (48)$$

$$\tilde{r}(x) = 1 - 2\sqrt{|A|} \sinh\left(\frac{1}{3} \ln\left(\sqrt{B^2 + 1} - B\right)\right), \quad A < 0. \quad (49)$$

Для получения контура тени при данном  $x$  вычисляем  $r(x)$  из (47)-(49), затем  $M$  выражаем через  $a$  согласно массовой формуле (27) и, подставляя результат во второе соотношение (44), находим  $y(x)$ . Графики контура тени коллапсара показаны на Рис.

13. Для сравнения приведены также контуры тени при выборе  $M = \text{const}$  (Рис. 14). С ростом  $a$  площадь тени в первом случае уменьшается, а во втором случае растёт.

Итак, в метрике Керра с неприводимой массой рост  $a$ , означающее увеличение энергии вращения и усиление гравитации вокруг источника, ведёт к росту красных смещений, радиусов специальных орбит и площади тени, как и должно быть из общих физических соображений.

#### 4. Метрика Керра-Ньюмана с неприводимой массой и её следствия

##### 4.1. Метрика Керра-Ньюмана с неприводимой массой

Метрика КН вокруг компактного источника с параметром вращения  $a$  и зарядом  $Q$  следует из стандартной метрики Керра (23) при замене  $2Mr \rightarrow 2Mr - Q^2$ . Линейный элемент тогда принимает вид [1-5]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta^{(Q)}} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 + \frac{2a(2Mr - Q^2)}{\rho^2} \sin^2 \theta dt d\varphi - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2(2Mr - Q^2)}{\rho^2} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad \Delta^{(Q)} = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2. \quad (50)$$

В метрике (50) её главный параметр – полная масса  $M$  зависит от двух других параметров  $a$ ,  $Q$ , и поэтому  $M$  надо выразить через  $M_{ir}$ ,  $a$  и  $Q$  согласно массовой формуле (3) (Рис 15). После этого метрика КН принимает вид:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2rM_{ir}}{\rho^2} \frac{1 + Q^2 / 4M_{ir}^2}{\sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}} + \frac{Q^2}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta_{ir}^{(Q)}} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left[r^2 + a^2 + \frac{a^2}{\rho^2} \left(2M_{ir}r \frac{1 + Q^2 / 4M_{ir}^2}{\sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}} - Q^2\right) \sin^2 \theta\right] \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{2a}{\rho^2} \left(2M_{ir}r \frac{1 + Q^2 / 4M_{ir}^2}{\sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}} - Q^2\right) \sin^2 \theta dt d\varphi, \quad (51)$$

$$\Delta_{ir}^{(Q)} = r^2 - 2rM_{ir} \frac{1 + Q^2 / 4M_{ir}^2}{\sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}} + a^2 + Q^2. \quad (52)$$

На экваториальной плоскости (51) переходит в:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M_{ir}}{r} \frac{1 + Q^2 / 4M_{ir}^2}{\sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \frac{r^2}{\Delta_{ir}^{(Q)}} dr^2 - (r^2 + a^2) d\varphi^2 - \frac{a^2}{r} \left(2M_{ir} \frac{1 + Q^2 / 4M_{ir}^2}{\sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}} - \frac{Q^2}{r}\right) d\varphi^2 + \frac{2a}{r} \left(2M_{ir} \frac{1 + Q^2 / 4M_{ir}^2}{\sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}} - \frac{Q^2}{r}\right) d\varphi dt \quad (53)$$

а на полюсе:

$$ds^2 = \frac{\Delta_{ir}^{(Q)}}{r^2 + a^2} dt^2 - \frac{r^2 + a^2}{\Delta_{ir}^{(Q)}} dr^2. \quad (54)$$

При  $r > 2M$  и  $a < 2M_{ir}$  метрики (50)-(54) не имеют особенностей. В них рост  $a$  и  $Q$ , ведущий к увеличению  $M$  за счёт энергии вращения, уменьшает  $g_{00}$  и поэтому усиливает гравитационное поле. В результате, наблюдаемые эффекты гравитации в поле вращающегося источника, такие как красные смещения, средние радиусы орбит и теней, *растут* с ростом  $a$  и  $Q$ .

Прежние предсказания для наблюдаемых эффектов при изменениях  $a$  или  $Q$ , сделанные при ошибочном условии  $M = const$  [2-5,8-9], далее следует заменить на корректные предсказания с учётом зависимости  $M$  от  $M_{ir}$ ,  $a$  и  $Q$ . В качестве примеров ниже будут приведены предсказания для эффекта замедления времени и красных смещений.

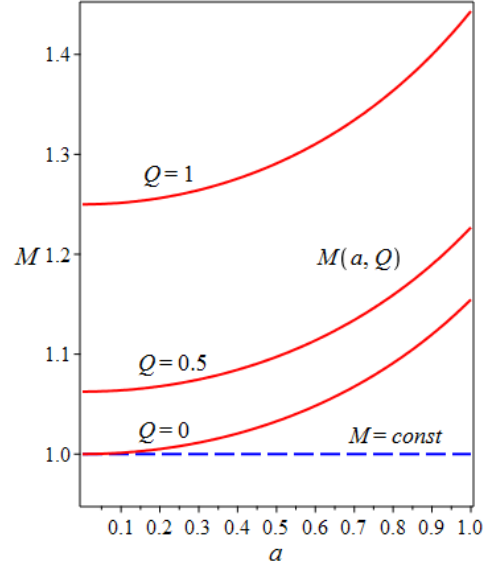


Рис. 15. Зависимость полной массы от  $a$  и  $Q$  в метрике КН.

#### 4.2. Замедление собственного времени и красные смещения

Замедление интервала собственного времени  $\Delta\tau = \Delta t g_{00}^{1/2}(r, \theta)$  между двумя событиями в точке  $(r, \theta, \varphi)$  вокруг источника с угловым моментом и зарядом, согласно (50), даётся выражениями соответственно: (а) при прежнем выборе с  $M = const$  и (b) при выборе массовой формулы (3):

$$\Delta\tau^{(a)} \simeq \Delta t \left( 1 - \frac{2Mr}{\rho^2} + \frac{Q^2}{\rho^2} \right)^{1/2}, \quad (55)$$

$$\Delta\tau^{(b)} \simeq \Delta t \left( 1 - \frac{2M_{ir}r}{\rho^2} \frac{1 + Q^2 / 4M_{ir}^2}{\sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}} + \frac{Q^2}{\rho^2} \right)^{1/2}, \quad (56)$$

Формула (56), записанная в виде:

$$\Delta\tau^{(b)} \simeq \Delta t \left\{ 1 - \frac{2M_{ir}r}{\rho^2 \sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2}} \left[ 1 + \frac{Q^2}{4M_{ir}^2} \left( 1 - \frac{2M_{ir}}{r} \sqrt{1 - a^2 / 4M_{ir}^2} \right) \right] \right\}^{1/2}, \quad (57)$$

ясно показывает, что рост  $a$  и  $Q$  усиливает замедление времени.

На экваторе ( $\theta = \pi / 2$ ) эти формулы принимают вид:

$$\Delta\tau^{(a)} \simeq \Delta t \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{1/2}, \quad (58)$$

$$\Delta\tau^{(b)} \simeq \Delta t \left\{ 1 - \frac{2M_{ir}}{r\sqrt{1-a^2/4M_{ir}^2}} \left[ 1 + \frac{Q^2}{4M_{ir}^2} \left( 1 - \frac{2M_{ir}}{r} \sqrt{1-a^2/4M_{ir}^2} \right) \right] \right\}^{1/2}, \quad (59)$$

а на полюсе ( $\theta = 0$ ):

$$\Delta\tau^{(a)} \simeq \Delta t \left( 1 - \frac{2M}{r(1+a^2/r^2)} + \frac{Q^2}{r^2+a^2} \right)^{1/2}, \quad (60)$$

$$\Delta\tau^{(b)} \simeq \Delta t \left\{ 1 - \frac{2M_{ir}(1+a^2/r^2)^{-1}}{r\sqrt{1-a^2/4M_{ir}^2}} \left[ 1 + \frac{Q^2}{4M_{ir}^2} \left( 1 - \frac{2M_{ir}}{r} \right) \sqrt{1-a^2/4M_{ir}^2} \right] \right\}^{1/2} \quad (61)$$

во всех этих случаях равен  $1+z = \Delta t / \Delta\tau$ .

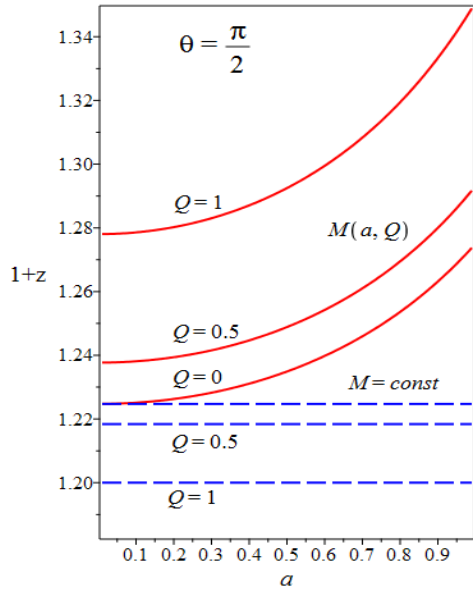


Рис. 16а. Зависимость от  $a$  красного смещения на экваторе,  $r = 3M_{ir}$ .

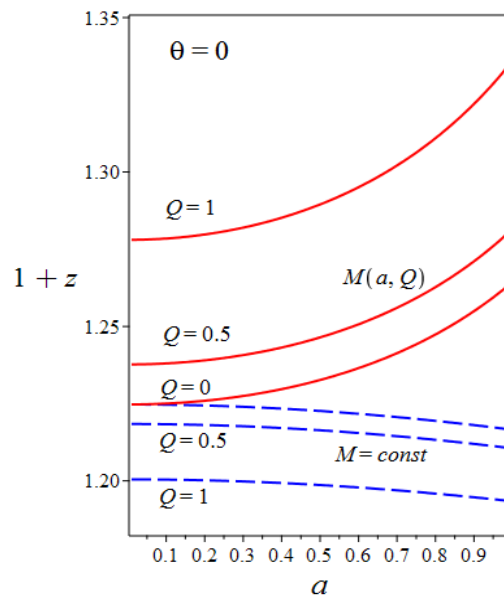


Рис. 16б. Зависимость от  $a$  красного смещения на полюсе,  $r = 3M_{ir}$ .

Соответствующие графики зависимости от  $a$  и  $Q$  фактора красного смещения  $1+z = g_{00}^{-1/2}$ , следующие из (58)-(61) приведены на Рис. 16.

Итак, увеличение  $a$  и/или  $Q$  в метрике КН с приведённой массой уменьшает  $g_{00}^{1/2}(r, \theta)$ , т. е. усиливает гравитацию источника, увеличивая степень замедления собственного времени и величину красных смещений. Как и в метрике Керра, также усиливаются и другие эффекты гравитации.

## 5. Заключение

Стандартная форма метрики вне вращающегося источника, как нейтрального (Керра), так и заряженного (КН), включает три параметра и один из них, полная масса на бесконечности  $M$ , зависит от двух других  $a$  и  $Q$ . В статье эти метрики были приведены к форме с независимыми параметрами, в которых  $M$  была выражена через приведённую массу  $M_{ir}$ , определяемую как остаток полной массы при  $a = Q = 0$ .

Это позволило исключить прежние предсказания о странном поведении гравитации и её эффектов при изменении  $a$  и  $Q$ . Эти предсказания делались при условии  $M = \text{const}$  при меняющихся  $a$ ,  $Q$  и состояли в утверждениях, что рост  $a$  и  $Q$ , ведущее к увеличению энергий вращения и электрического поля, ослабляет гравитацию вне источника и поэтому ослабляет и физические эффекты гравитации [2-9].

В статье показано, что из метрики РН, Керра и КН с независимыми параметрами  $M_{ir}$ ,  $a$  и  $Q$  следуют обратные предсказания, что рост  $a$  и  $Q$ , добавляя положительные энергии вращения и электрического поля, усиливает гравитацию и увеличивает величину её эффектов. Эти следствия физически корректны и в дальнейшем (при физически реализуемых значениях параметров) будут подтверждаться наблюдениями также, как это всегда было с физически корректно выведенными предсказаниями общей теории относительности.

В заключении необходимо отметить, что с физической точки зрения необходимо учесть ещё и отрицательную энергию связи электрического потенциала, удерживающего ионы на поверхности источника с радиусом  $r_b$ . Эта энергия связи устанавливает верхние пределы для параметров источника  $a < a_{\max}$  и  $Q < Q_{\max}$ , при превышении которых ионы покидают источник из-за центробежной силы или силы кулоновского отталкивания. В данной статье предполагалось, что эта энергия связи достаточна для удержания ионов и что эта энергия уже включена в  $M_0$ . Поскольку для большинства состояний вещества в источниках  $a_{\max}^2 / r_b \ll M_0$  и  $Q_{\max}^2 / r_b \ll M_0$ , то приводимые в статье графики физически обоснованы при таких же малых значениях  $a$  и  $Q$ . Приведённые же графики при больших величинах  $a$  и  $Q$  имеют чисто теоретический характер и представляют интерес в основном при сопоставлении с аналогичными графиками без учёта зависимости  $M$  от  $a$  и  $Q$ .

Более детальное описание следствий метрик с независимыми параметрами и их дальнейших применений приведены в книге [12].

## Литература

1. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. (1977) Гравитация. т. 3. Мир.
2. Frolov V., Zelnikov A. (2011) Intr. to BH Physics. Oxf. U. P.
3. Bambi C. (2017) *Black Holes: A Lab. for Testing Strong Gravity*. Springer.
4. Grenzebach A. (2017) The Shadow of BHs. Springer.
5. Ferrari V., Gualtieri L., Pani P. (2021) *Gen. Rel. and its Applications*. Taylor & Fr. G.
6. Jeffery G. (1921) *Proc. R. Soc. Lond.* **A99** (697) 123.
7. Pugliese D., Quevedo H., Ruffini R. (2011) *Phys. Rev.* **D84**, 044030.
8. Bardeen J., Press W., Teukolsky S. (1972) *Astrophys. J.* **178**, 347.
9. Pugliese D., Quevedo H., Ruffini R. (2013) *Phys. Rev.* **D88**, 024042.
10. Закир З. (2022) *Квант. и грав. физ.*, **3**:016-7694, **3**:017-7694.
11. Закир З. (2022) *Квант. и грав. физ.*, **3**:018-7715.
12. Закир З. (2023) *Метрики с независимыми парам. вне заряд. и вращ. источников*. ЦТФА, Т.
13. Florides P. (1960) *PhD Thesis*, U. London; (1962) *Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.* **58**(1) 110; (1977) *Nuovo Cim.*, **A42**(3), 343.
14. Christodoulou D. (1970) *Phys. Rev. Lett.*, **25**, 1596.
15. Christodoulou D., Ruffini R. (1971) *Phys. Rev.*, **D4**, 3552.
16. Cunha P. V., Herdeiro C. A. (2018) *Gen. Rel. & Grav.*, **50**(4), 1.