

Симметричное по времени квантование релятивистских полей.

1. Комплексные поля, безмассовые калибровочные поля, гравитоны

Захид Закир¹

Аннотация

В стандартной формулировке КТП, где есть только частицы и античастицы положительной энергии, энергия и заряд вакуума расходятся, что из-за существования гравитации ведёт к несостоятельности теории (проблема космологической постоянной). В статье показано, что в интерпретации Штюкельберга-Фейнмана (ШФ), где античастицы описываются как частицы с отрицательной энергией движущиеся назад во времени, энергия и заряд вакуума комплексных полей равны нулю и нет проблемы космологической постоянной. Однако до сих пор считалось, что интерпретация ШФ несовместима с КТП, так как ведёт к отрицательным вероятностям, и поэтому в статье даётся новая формулировка КТП на базе интерпретации ШФ в форме симметричного по времени квантования (СВК), где вероятности состояний положительны. В СВК следствия интерпретации ШФ учтены последовательно и показывается, что: а) отрицательный знак нормы состояний поля меняет лишь знак волновой функции, а не вероятностей; б) выражение интегралов в обратном направлении времени через интегралы в прямом меняет их знак; в) хронологическое упорядочение операторов симметрично по времени и запись их через обычное упорядочение ведёт к стандартной диаграммной технике и поэтому СВК корректно описывает известные наблюдаемые эффекты. В СВК меняются результаты моделей объединения, в частности, а) в теориях с комплексными полями нулевой энергии нет и при нарушенной суперсимметрии, б) в теориях струн нет нулевой энергии мод, что позволяет включить гравитацию, но нет конформной аномалии и размерность пространства может быть произвольной.

Ключевые слова: квантование, нулевая энергия, диаграммная техника, Стандартная Модель, космологическая постоянная

Содержание

1. ВВЕДЕНИЕ	2
2. СИММЕТРИЧНОЕ ПО ВРЕМЕНИ КВАНТОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПОЛЕЙ.....	3
2.1. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ШФ СОСТОЯНИЙ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ.....	3
2.2. КОМПЛЕКСНЫЕ СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПОЛЯ	4
2.3. НОРМА И ВЕРОЯТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ	6
2.4. ПОЛЕ ФОТОНОВ	7
2.5. ФЕРМИОННОЕ ПОЛЕ.....	8
2.6. БЕЗМАССОВЫЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ И ПОЛЕ ГРАВИТОНОВ.....	10
3. КОММУТАТОРЫ, ХРОНОЛОГИЧЕСКОЕ УПОРЯДОЧЕНИЕ И ПРОПАГАТОРЫ	10
3.1. КОММУТАТОРЫ ПОЛЕЙ И СИММЕТРИЧНОЕ ХРОНОЛОГИЧЕСКОЕ УПОРЯДОЧЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ	10
3.2. ПРИЧИННЫЕ ПРОПАГАТОРЫ ПОЛЕЙ	11
4. ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ПОЛЯ И ДИАГРАММНАЯ ТЕХНИКА В СВК.....	14
4.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ	14
4.2. ДИАГРАММНАЯ ТЕХНИКА	15
5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	15
ПРИЛОЖЕНИЯ.	16
А. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР С КОМПЛЕКСНЫМИ КООРДИНАТАМИ И ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ.	16
Б. СОСТОЯТЕЛЬНАЯ ТЕОРИЯ СТРУН БЕЗ КОНФОРМНОЙ АНОМАЛИИ	17
ЛИТЕРАТУРА.....	18

¹ *Центр теоретической физики и астрофизики, Ташкент Узбекистан, zzakir@qgph.uz ORCID*

1. Введение

Интерпретация Штюкельберга-Фейнмана (ШФ) [1,2] (см. [3]), которая широко применяется в физике частиц, основана на *принципе эквивалентности* античастиц положительной энергии, идущих только вперёд во времени, частицам отрицательной энергии идущим только назад во времени. Однако при квантовании полей состояния с отрицательной энергией имеют отрицательную норму в фокковском пространстве и было принято считать, что это ведёт к отрицательным вероятностям (см. [4]), Поэтому интерпретация ШФ считалась несовместимой с квантовой теорией поля (КТП).

В результате, формулировке КТП с частицами и античастицами положительной энергии [5,6], где вакуум есть состояние с наименьшей энергией, была принята как стандартная. Такое описание вводилось путём ручной замены операторов рождения (уничтожения) частиц отрицательной энергии на операторы уничтожения (рождения) античастиц положительной энергии: $a_{-k}^+ \rightarrow b_k$ ($a_{-k} \rightarrow b_k^+$). Однако из-за такой замены у полей появлялась расходящаяся нулевая энергия (а у заряженных и нулевой заряд), даже когда её нет при отрицательных энергиях, в частности для комплексных полей.

При решении практических задач проблема энергии вакуума игнорировалась. Это делалось постулированием рецепта нормального упорядочения, означавшем отбрасывание расходящихся энергии и заряда вакуума свободных полей. Однако существование гравитации не позволяет игнорировать нулевую энергию вакуума и это вело к несостоятельности стандартной формулировки КТП. Эта фундаментальная проблема, известная как проблема космологической постоянной, не была решена также и во всех попытках обобщения стандартной КТП и Стандартной Модели (СМ) физики частиц [7].

В то же время, при возврате к ковариантной формулировке КТП с отрицательными энергиями проблема с энергией вакуума отпадает в частном случае комплексных полей. В статье развивается именно такой подход и формулируется метод *симметричного по времени квантования* (СВК), в котором вероятности состояний положительны и нет вклада комплексные полей в космологическую постоянную. В СВК интерпретация ШФ формулируется более последовательно, чем это делалось ранее. В частности, учтено, что:

- 1) в фокковском пространстве отрицательный знак нормы состояния меняет лишь знак волновой функции, а вероятности остаются положительными;
- 2) необходимо симметричное хронологическое упорядочение операторов для взаимно обратных направлений эволюции во времени состояний разного знака энергии;
- 3) причинные пропагаторы возникают естественным образом без ручной перестановки полевых операторов;
- 4) выражение интеграла в обратном направлении времени через интеграл в прямом направлении меняет знак интеграла.

В статье показано, что СВК ведёт к логически последовательной и состоятельной с физической точки зрения формулировке КТП без нулевой энергии и заряда вакуума тех релятивистских полей, которые описываются комплексными полями². В частности, поперечные фотоны можно описывать как комплексное скалярное поле с киральным зарядом, роль которого играет спиральность. Поперечные кванты безмассовых калибровочных полей СМ и гравитоны можно квантовать аналогично.

В статье показывается, что в СВК причинные пропагаторы и диаграммная техника строятся естественным образом без прежних эвристических правил, а конечные результаты совпадают с результатами стандартной диаграммной техники. Тем самым СВК корректно описывает известные наблюдаемые эффекты.

² 26.07.2023 исправлены опечатки, уточнены формулировки и введён принцип эквивалентности, а знак потока вероятности квантов оставлена отрицательной, когда поток направлен обратно оси времени.

В СВК меняются результаты моделей объединения, так как нулевой энергии не будет даже при нарушенной суперсимметрии между комплексными полями, а в состоятельной теории релятивистских струн не будет нулевой энергии мод, что позволяет включать гравитацию, но не будет и конформной аномалии, что не даёт оснований для высших измерений и фиксации размерности пространства.

Общее описание СВК и применение к свободным полям дано в разделе 2, а пропагаторы, взаимодействующие поля и диаграммная техника рассмотрены в разделах 3-4. В Приложении показаны применения СВК к комплексному гармоническому осциллятору и релятивистским струнам. Применения СВК полям со спонтанным нарушением симметрии будут рассмотрены в других статьях. Более детальное изложение СВК дано в книге [8].

2. Симметричное по времени квантование релятивистских полей

2.1. Интерпретация ШФ состояний с отрицательной энергией

Стандартная формулировка КТП включает только состояния положительной энергии с лагранжианами $L_+^{(0)}(q_+, \dot{q}_+)$ и $L_{a+}^{(0)}(q_{a+}, \dot{q}_{a+})$ для свободных частиц и античастиц соответственно, которые движутся только вперёд во времени. Это выражается и в интегралах по времени, и функция действия для них имеет вид:

$$S(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} dt (L_+^{(0)} + L_{a+}^{(0)}), \quad t_1 > t_0. \quad (1)$$

Ковариантная форма релятивистской квантовой теории проще и естественна, когда нет античастиц и есть лишь частицы обеих знаков энергии. Согласно интерпретации ШФ частицы отрицательной энергии, идущие только назад во времени эквивалентны античастицам положительной энергии, идущим только вперёд во времени. Поэтому далее в статье излагается *симметричное по времени квантование* (СВК), основанное на последовательном проведении интерпретации ШФ в теориях релятивистских систем, в частности, релятивистских полей.

В СВК функция действия (1) принимает вид:

$$S(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} dt L_+^{(0)} + \int_{t_1}^{t_0} dt L_-^{(0)}, \quad t_1 > t_0, \quad (2)$$

где $L_-^{(0)}$ - свободной лагранжиан частицы с отрицательной энергией. Интегрирование во втором интеграле (2) идёт в обратном направлении к оси времени t , т.е. $L_-^{(0)}$ интегрируется от начального момента t_1 к более раннему конечному моменту t_0 .

Однако, полный лагранжиан $L = L^{(0)} + L_I$, в отличие от свободных лагранжианов $L_+^{(0)}$ и $L_-^{(0)}$, не диагонален, поскольку включает взаимодействие L_I , смешивающее положительно- и отрицательно-энергетические состояния. Поэтому L уже не есть суммы членов, каждый из которых относится к одному знаку энергии.

Следовательно, интегрирование по времени надо сделать единообразным для всех членов полного лагранжиана L и удобно везде интегрировать в прямом направлении времени. Для этого пределы во втором интеграле (2) поменяем местами, что даёт знак минус перед L_- . В результате, интегрирование во втором

члене (2) станет таким же, как в первом члене с теми же пределами и функция действия с L запишется более компактно в виде обычного интеграла вперёд во времени:

$$S(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} L dt, \quad L = L_+^{(0)} + (-L_-^{(0)}) + L_I, \quad t_1 > t_0. \quad (3)$$

Поскольку $L_-^{(0)}$ отрицательно-определённая и отличается знаком от $L_{a+}^{(0)}$, то $-L_-^{(0)}$ положительно-определённая и равна $L_{a+}^{(0)}$ с заменой $q_{a+}, \dot{q}_{a+}$ на $q_-, \dot{q}_-$.

Выражение интегралов, направленных обратно к оси времени, через интегралы в прямом направлении времени, ведущее к изменению знака, удобно также и для пропагаторов релятивистских полей и будет рассмотрено в разделе 3.1.

Отметим, что в СВК, как и в интерпретации ШФ, модели физики частиц и экспериментальные данные описываются непосредственно без античастиц. Достаточно знать то, что начальное состояние частицы отрицательной энергии $-p_\mu$ описывает конечное состояние античастицы с $+p_\mu$. Это связано также с перекрёстной (кроссинг) симметрией, одной из основных симметрий физики частиц.

2.2. Комплексные скалярное и векторное поля

Энергия k_0 квантов релятивистского скалярного поля ϕ связана с импульсом $\mathbf{k}$ релятивистским соотношением $k_{0\pm} = \pm\omega_k$, $\omega_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ и полный набор решений уравнений поля включает состояния с обеими знаками энергии. В интерпретации ШФ частицы с отрицательной энергией k_{0-} , идущие назад во времени, эквивалентны античастицам с энергией k_{0+} идущим вперёд во времени.

По этой причине релятивистские поля в общем случае описываются комплексными полевыми функциями. Поэтому релятивистские частицы будут чем-то отличаться от своих античастиц и маловероятно, чтобы были истинно нейтральными частицами.

После записи интегралов обратно во времени в терминах интегралов вперёд во времени, функция действия для комплексного скалярного поля $\phi(\mathbf{x}, t)$ и его эрмитово сопряжённой компоненты $\phi^+(\mathbf{x}, t)$ принимает вид ($\mu = 0, 1, 2, 3$):

$$S = \int d^4x (\partial_\mu \phi^+ \cdot \partial^\mu \phi - m^2 \phi^+ \phi). \quad (4)$$

Соответствующие гамильтониан, оператор заряда и канонические импульсы равны:

$$H = \int d^3x (\pi \pi^+ + \nabla \phi^+ \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^+ \phi), \quad (5)$$

$$Q = i \int d^3x (\phi^+ \pi^+ - \pi \phi), \quad (6)$$

$$\pi(x) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \phi)} = \partial_t \phi^+, \quad \pi^+(x) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \phi^+)} = \partial_t \phi. \quad (7)$$

Уравнения поля и одновременные коммутаторы полей имеют вид:

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \phi = 0, \quad (\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \phi^+ = 0. \quad (8)$$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = [\phi^+(\mathbf{x}, t), \pi^+(\mathbf{x}', t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (9)$$

Решения уравнений поля (8) ведут к частотным разложениям полевых функций и канонических импульсов:

$$\phi(x) = \phi_+ + \phi_- = \int d\tilde{k} (a_k e^{-ikx} + a_{-k} e^{ikx}), \quad \int d\tilde{k} \equiv \int \frac{d^2k}{(2\pi)^3 2\omega_k}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \phi^+(x) &= \phi_+^+ + \phi_-^+ = \int d\tilde{k} (a_k^+ e^{ikx} + a_{-k}^+ e^{-ikx}), \\ \pi(x) &= \pi_+ + \pi_- = i \int d\tilde{k} \omega_k (a_k^* e^{ikx} - a_{-k}^* e^{-ikx}), \\ \pi^+(x) &= \pi_+^+ + \pi_-^+ = -i \int d\tilde{k} \omega_k (a_k e^{-ikx} - a_{-k} e^{ikx}). \end{aligned} \quad (11)$$

Подставив (10)-(11) в (9) получаем коммутаторы для операторов рождения-уничтожения квантов поля обоих знаков энергии, ненулевые из которых есть:

$$[a_k, a_{k'}^+] = 2\omega_k (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (12)$$

$$[a_{-k}, a_{-k'}^+] = -2\omega_k (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (13)$$

Следствия знака минус в (13) рассмотрены ниже в разделе 2.3. Энергия и заряд поля (5)-(6) выражаются через операторы рождения-уничтожения в виде:

$$H = \int d\tilde{k} \omega_k (a_k^+ a_k + a_{-k}^+ a_{-k}), \quad (14)$$

$$Q = \int d\tilde{k} (a_k^+ a_k - a_{-k}^+ a_{-k}). \quad (15)$$

Операторы уничтожения определяют вакуумы для обоих типов частиц:

$$a_k |0\rangle = 0, \quad a_{-k} |0\rangle = 0, \quad (16)$$

которые, как видно из (14)-(15), не содержат нулевой энергии и нулевого заряда. Одночастичные состояния определены как:

$$a_k^+ |0_+\rangle = |k\rangle, \quad a_{-k}^+ |0_-\rangle = |-k\rangle. \quad (17)$$

Массивное комплексное векторное поле $B_\mu(x)$ содержит вектор поляризации $\mathcal{E}_{\mu k}^\lambda$, и его частотное разложение имеет вид [5,6]:

$$\begin{aligned} B_\mu(x) &= \sum_\lambda \int d\tilde{k} (a_{k\lambda} \mathcal{E}_{\mu k}^\lambda e^{-ikx} + a_{-k\lambda} \mathcal{E}_{\mu k}^{\lambda+} e^{ikx}), \\ B_\mu^+(x) &= \sum_\lambda \int d\tilde{k} (a_{k\lambda}^+ \mathcal{E}_{\mu k}^{\lambda+} e^{ikx} + a_{-k\lambda}^+ \mathcal{E}_{\mu k}^\lambda e^{-ikx}). \end{aligned} \quad (18)$$

После выделения трёх независимых степеней свободы, каждая из них квантуется в данной системе отсчёта независимо как три комплексных скалярных поля. Поэтому гамильтониан и оператор заряда векторного поля имеют вид:

$$\begin{aligned} H &= \sum_\lambda \int d\tilde{k} \omega_k (a_{k\lambda}^+ a_{k\lambda} + a_{-k\lambda}^+ a_{-k\lambda}), \\ Q &= \sum_\lambda \int d\tilde{k} (a_{k\lambda}^+ a_{k\lambda} - a_{-k\lambda}^+ a_{-k\lambda}). \end{aligned} \quad (19)$$

Они также не содержат нулевой энергии и нулевого заряда вакуума.

Этот результат об отсутствии нулевой энергии и нулевого заряда вакуума комплексного векторного поля, полученный в одной системе отсчёта, справедлив для всех систем отсчёта из-за инвариантности вакуума.

Итак, в СВК операторы наблюдаемых комплексных скалярного и векторного полей нормально упорядочены автоматически и нет нулевой энергии и нулевого заряда вакуума.

2.3. Норма и вероятность состояний с отрицательной энергией

Рассмотрим теперь норму и амплитуду вероятности одночастичных состояний с отрицательной энергией, беря как пример, комплексное скалярное поле. Отрицательный знак коммутатора в (13) ведёт к отрицательной норме состояний в фоковском пространстве:

$$\langle -k' | -k \rangle = \langle 0_- | a_{-k'} a_{-k}^+ | 0_- \rangle = -2\omega_k (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \langle 0_- | 0_- \rangle. \quad (20)$$

Этот факт часто интерпретировался как появления отрицательной вероятности для таких состояний. Однако, волновая функция $\psi_{-k'}(x)$ (амплитуды вероятности) этого состояния, квадрат модуля которой и даёт вероятности состояний (точнее плотности вероятности, что далее не будем указывать), определяется как матричный элемент от полевого оператора (10) (см. [5,6]), который вместе с (20) даёт для этой амплитуды:

$$\begin{aligned} \psi_{-k}(x) &= \langle 0_- | \phi(x) | -k \rangle = \int d\tilde{k}' \langle 0_- | a_{-k'} | -k \rangle e^{ik'x} = \\ &= \int d\tilde{k}' \langle 0_- | a_{-k'} a_{-k'}^+ | 0_- \rangle e^{ik'x} = -e^{ikx}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь отрицательный знак нормы в (20) меняет лишь знак волновой функции состояния поля (21) и не влияет на знак вероятности, так как вероятность даётся выражением билинейным относительно волновой функции (21).

Как решение уравнения Клейна-Гордона, волновая функция (21) и квадрат её модуля являются скалярами, а не 4-компонентами вектора. Поэтому вероятность определяется через 4-вектор потока (тока) вероятности S^μ , который равен

$$S_{\mu\pm} = \frac{i}{2m} (\psi_\pm^\dagger \vec{\partial}_\mu \psi_\pm). \quad (22)$$

Пространственные компоненты этого потока $S_\pm$ дают потоки разного знака вдоль каждой оси пространственных координат в зависимости от направления импульса потока относительно данной оси:

$$\mathbf{S}_\pm = \frac{\mathbf{k}}{m} \psi_\pm^\dagger \psi_\pm. \quad (23)$$

Аналогично, времениподобная компонента потока $S_{0\pm}$ также имеет разные знаки в зависимости от того, по или против оси времени идут частицы двух знаков энергии:

$$S_{0\pm} = \pm \frac{\omega_k}{m} \psi_\pm^\dagger \psi_\pm. \quad (24)$$

При нормировке на $2\omega_k$ частиц в единице объёма $V = 1$ (на гиперповерхности одновременности $t = \text{const}$), суммы вероятностей состояний для каждого из знаков энергии даётся интегралами (см. [6]):

$$\int dV n_0 S_{\pm}^0 = \pm \frac{\omega_k}{m}, \quad (25)$$

где $n_{0\pm} = \pm 1$ - времениподобная нормаль к гиперповерхности одновременности. Здесь знак минус, относящийся к отрицательно-энергетическим частицам, означает, что их поток вероятности направлен в прошлое.

Итак, хотя норма (20) одночастичного состояния (а также многочастичных состояний с нечётным числом частиц) отрицательна, тем не менее вероятности состояний остаются положительными. При этом разный знак потоков вероятности для частиц разного знака энергии выражает лишь тот факт, что в СВК эти два вида потоков направлены в противоположные стороны оси времени.

2.4. Поле фотонов

В системе покоя источника фотонов, где ось x^3 направлена вдоль импульса фотона, поле фотонов имеет лишь две поперечные физические компоненты $(0, A_1, A_2, 0)$, которые и следует квантовать и поэтому калибровка $A_0 = A_3 = 0$ выражает реальную физическую ситуацию в данном случае.

Тем не менее, уже другая ориентация оси $x^{3'}$ сделает ненулевой компоненту $A_{3'}$, выражаемой через A_1, A_2 , а в других инерциальных системах отсчёта преобразование Лоренца породит и ненулевую кулоновскую компоненту $A_{0'}$. Поэтому в произвольной инерциальной системе указанное поле фотонов имеет все четыре составляющие $A_{\mu'} = e_{\mu'}^1 A_1 + e_{\mu'}^2 A_2$ с 4-вектором поляризации $\varepsilon_{\mu'} = e_{\mu'}^1 \varepsilon_1 + e_{\mu'}^2 \varepsilon_2$. Здесь тетрады $(e_{\mu'}^1, e_{\mu'}^2)$ являются постоянными кинематическими факторами, осуществляющие преобразование Лоренца из системы покоя источника фотонов в рассматриваемую систему отсчёта.

По этой причине, при рассмотрении физических аспектов достаточно квантовать физические компоненты поля фотонов в системе покоя источника, а затем результаты можно будет преобразовать в нужную систему отсчёта.

При условии $\partial_{\mu'} A^{\mu'} = 0$ функция действия поля фотонов с обычными интегралами по времени имеет вид:

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4 x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d^4 x \partial_{\mu} A^{\nu} \cdot \partial^{\mu} A_{\nu}. \quad (26)$$

В системе покоя источника $\mathbf{k} = (0, 0, k^3)$ и калибровке $A_3 = A_0 = 0$ поперечные физические компоненты циркулярно-поляризованных фотонов образуют аналог комплексного скалярного поля $A = (A_1 + iA_2) / \sqrt{2}$, $A^+ = (A_1 - iA_2) / \sqrt{2}$. Лагранжиан (26) и гамильтониан поэтому аналогичны случаю комплексного скалярного поля:

$$L = \int d^3 x \partial_{\mu} A^+ \cdot \partial^{\mu} A, \quad (27)$$

$$H = \int d^3 x (\pi \pi^+ + \nabla A^+ \cdot \nabla A), \quad (28)$$

где $\pi(x) = \partial_t A^+$, $\pi^+(x) = \partial_t A$. Описание поля циркулярно-поляризованных фотонов в терминах комплексных переменных диагонализует гамильтониан (28) и спиральность:

$$\Lambda = i \int d^3x (A^+ \pi^+ - \pi A). \quad (29)$$

Последний фактически является киральным зарядом, а фотоны со спиральностями $\Lambda = \pm 1$ подобны частице и зарядово-сопряжённой античастице.

Уравнения поля $\partial_\mu \partial^\mu A = 0$, $\partial_\mu \partial^\mu A^+ = 0$ дают частотное разложение:

$$A = \int d\tilde{k} (a_k e^{-ikx} + a_{-k} e^{ikx}), \quad \pi = i \int d\tilde{k} \omega_k (a_k^+ e^{ikx} - a_{-k}^+ e^{-ikx}), \quad (30)$$

где $a_{\pm k}^+, a_{\pm k}$ являются операторами рождения-уничтожения для $\Lambda_{\pm} = +1$. Для коммутаторов это даёт:

$$[A(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (31)$$

$$[a_{\pm k}, a_{\pm k'}^+] = \pm (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (32)$$

При произвольной ориентации осей координат здесь появится проекционный оператор, выделяющий поперечные компоненты.

Как было показано в предыдущем разделе 2.3, отрицательный коммутатор в (32) не меняет знак вероятностей состояний и они остаются положительными. Операторы наблюдаемых равны:

$$H = \int d\tilde{k} \omega_k (a_k^+ a_k + a_{-k}^+ a_{-k}), \quad (33)$$

$$\Lambda^0 = \int d\tilde{k} (a_k^+ a_k - a_{-k}^+ a_{-k}).$$

Отсюда видно, что основные состояния, определённые как $a_{\pm k} |0\rangle = 0$, не содержат нулевую энергию и нулевую спиральность.

Из-за инвариантности вакуума обращение его энергии в нуль в одной из систем отсчёта и в одной из калибровок верно для всех систем отсчёта и калибровок.

2.5. Фермионное поле

В теории фермионов со спином $\frac{1}{2}$ поле Дирака ψ включает положительно- и отрицательно-энергетические спиноры $\psi_+^\alpha \sim u_p^\alpha$ и $\psi_-^\alpha \sim v_p^\alpha$, которые соответствуют положительно- и отрицательно-энергетическим состояниям.

Поэтому совершенно неестественным для такой теории было внесение в неё «руками» чужеродного элемента – операторов рождения-уничтожения для античастиц положительной энергии, сохраняя при этом спиноры для состояний отрицательной (!) энергии, как это было сделано в стандартной формулировке КТП. Это затем потребовало новых «ручных» полуфеноменологических операций. К ним относятся, в частности, нормальное упорядочение и построения пропагаторов вручную, при этом сохранив у последних полюса при отрицательной энергии.

Интерпретация ШФ, напротив, естественны для теории фермионов и более того, именно там она и возникла. Поэтому в СВК теория фермионов, записанная в терминах обычных интегралов по времени, практически не требует серьёзной модификации. Наоборот, именно в СВК, как будет видно далее, теория фермионов становится последовательной, без чужеродных элементов и полуфеноменологических рецептов.

В СВК функция действия для поля Дирака с обычными интегралами по времени имеет вид:

$$S = \int d^4x \left(\frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] - m \bar{\psi} \psi \right). \quad (34)$$

Отсюда следуют гамильтониан, оператор заряда и уравнение Дирака:

$$H = \frac{i}{2} \int d^3x [\psi^\dagger (\partial_t \psi) - (\partial_t \psi^\dagger) \psi], \quad (35)$$

$$Q = \int d^3x \psi^\dagger \psi, \quad (36)$$

$$\gamma^\mu i \partial_\mu \psi - m \psi = 0.$$

Частотное разложение операторов поля по решениям (36) даёт:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi_+ + \psi_- = 2m \sum_\alpha \int d\tilde{p} (b_{p\alpha} u_p^\alpha e^{-ipx} + b_{-p\alpha} v_p^\alpha e^{ipx}), \\ \psi^\dagger(x) &= \psi_+^\dagger + \psi_-^\dagger = 2m \sum_\alpha \int d\tilde{p} (b_{p\alpha}^\dagger u_p^{\alpha\dagger} e^{ipx} + b_{-p\alpha}^\dagger v_p^{\alpha\dagger} e^{-ipx}). \end{aligned} \quad (37)$$

Билинейные комбинации спиноров имеют вид ($E_p = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$):

$$u_p^{\alpha\dagger} u_p^{\alpha'} = v_p^{\alpha\dagger} v_p^{\alpha'} = \frac{E_p}{m} \delta^{\alpha\alpha'}, \quad (38)$$

$$\bar{u}_p^\alpha u_p^{\alpha'} = -\bar{v}_p^\alpha v_p^{\alpha'} = \delta^{\alpha\alpha'}. \quad (39)$$

$$\sum_\alpha u_p^\alpha \bar{u}_p^\alpha = \frac{\gamma p + m}{2m}, \quad -\sum_\alpha v_p^\alpha \bar{v}_p^\alpha = \frac{-\gamma p + m}{2m}. \quad (40)$$

Поскольку волновые функции фермионов антисимметричны, полевые операторы должны менять знак при перестановке. Поэтому при перестановке полевых операторов в коммутаторах их произведение меняет знак и коммутатор переходит в антикоммутатор. Тем самым, поле фермионов квантуется одновременными антикоммутаторами ($\pi = i\psi^\dagger$):

$$\{\psi^\alpha(\mathbf{x}, t), \pi^{\alpha'}(\mathbf{x}', t)\} = i\{\psi^\alpha(\mathbf{x}, t), \psi^{\alpha'}(\mathbf{x}', t)\} = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta^{\alpha\alpha'}, \quad (41)$$

$$\{b_{\pm p\alpha}, b_{\pm p'\alpha'}^\dagger\} = \frac{E_p}{m} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (42)$$

В результате, выражения (35)-(42) дают для наблюдаемых:

$$\begin{aligned} H &= \sum_\alpha \int d^3p \frac{m}{E_p} (b_{p\alpha}^\dagger b_{p\alpha} - b_{-p\alpha}^\dagger b_{-p\alpha}) E_p, \\ Q &= \sum_\alpha \int d^3p \frac{m}{E_p} (b_{p\alpha}^\dagger b_{p\alpha} + b_{-p\alpha}^\dagger b_{-p\alpha}). \end{aligned} \quad (43)$$

Итак, фермионные основные состояния, определённые как $b_{\pm p\alpha} |0\rangle = 0$, также не содержат нулевой энергии и нулевого заряда. В СВК нулевые энергии комплексных полей фермионов и бозонов отсутствуют и если в суперсимметричных теориях суперсимметрия слабо нарушена, то это не ведёт к появлению нулевой энергии вакуума.

Отметим, что между соотношениями теорий фермионов и бозонов нет прямой аналогии. Если свойства квантованного бозонного поля в основном определяются операторами рождения-уничтожения, то в теории фермионов свойства операторов поля определены нетривиальным сочетанием свойств операторов рождения-уничтожения, двух видов 4-спиноров u_p^α, v_p^α вместе с матрицами Дирака γ^μ . В частности, отрицательный знак появляется не у тока вероятности $v_p^{\alpha+} v_p^{\alpha'}$ в (38), а у билинейных комбинации $v_p^{\alpha+} \gamma^0 v_p^{\alpha'} = -\delta^{\alpha\alpha'}$ в (39) и проекционного оператора в (40). Кроме того, антикоммутатор $\{b_{-p\alpha}, b_{-p'\alpha'}^+\}$ в (42) также остаётся положительным.

Эти необычные свойства фермионных состояний продолжают тот ряд, который был известен ранее – то, что канонический импульс имеет вид $\pi = i\psi^+$, а собственные значения оператора скорости равны скорости света. Более детальное обсуждение этих вопросов, включая возможности модификации формализма, будет приведено в последующих публикациях.

2.6. Безмассовые калибровочные поля и поле гравитонов

В системе покоя источника, когда ось x^3 направлена вдоль импульса излучаемого кванта, кванты безмассового неабелевого векторного калибровочного поля A_μ^a (спин 1) и гравитоны (спин 2) имеют две поперечные физические состояния. Здесь имеется аксиальная симметрия, а при круговой поляризации свободный гамильтониан и спиральность диагональны.

По этой причине их квантование аналогично случаю фотонного поля. Дальнейший учёт нелинейности, т.е. взаимодействий разных компонент поля, и внутренних симметрий не меняет вывода об отсутствии нулевой энергии вакуума, составляющей часть свободного гамильтониана. Нелинейные вклады в энергию поля пропорциональны константам связи и уменьшаются в пределе слабого поля, тогда как нулевая энергия, как энергия флуктуаций вакуума $\omega_k / 2$ каждой из физических компонент в свободном гамильтониане, не зависит от констант взаимодействия.

Вывод о том, что при квантовании безмассовых неабелевых полей и поля гравитона в одной системе отсчёта, в поперечной калибровке нулевая энергия не возникает, остаётся в силе для всех систем отсчёта и калибровок из-за инвариантности вакуума [8].

3. Коммутаторы, хронологическое упорядочение и пропагаторы

3.1. Коммутаторы полей и симметричное хронологическое упорядочение операторов

Коммутатор компонент комплексного скалярного поля ϕ равен:

$$\begin{aligned} [\phi(x'), \phi^*(x)] &= \\ &= \int d\tilde{k} d\tilde{k}' \{ [a_k, a_{k'}^*] e^{-i(\omega_k t' - \omega_{k'} t)} + [a_{-k}, a_{-k'}^*] e^{i(\omega_k t' - \omega_{k'} t)} \} e^{i(\mathbf{k}' \mathbf{x}' - \mathbf{k} \mathbf{x})} = \\ &= \int d\tilde{k} (e^{-i\omega_k(t'-t)} - e^{i\omega_k(t'-t)}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})} = D(x' - x). \end{aligned} \quad (44)$$

где $D(x'-x)$ - функция Паули-Йордана, которая исчезает за световым конусом. Для канонически-сопряжённых операторов поля имеем:

$$[\phi(x'), \pi(x)] = i\partial_t D(x'-x). \quad (45)$$

Для фермионного поля канонический импульс равен $\pi = i\psi^+$, а аналог (45) есть:

$$\{\psi(x'), \bar{\psi}(x)\} = -(i\gamma^\mu \partial_\mu + m) iD(x'-x). \quad (46)$$

Он согласуется с одновременными антикоммутаторами (42).

Стандартный оператор хронологического упорядочения T_+ действует только на операторы состояний положительной энергии и располагает их в порядке увеличения времени справа налево:

$$T_+[A_+(t')B_+(t)] = \begin{cases} A_+(t')B_+(t), & t' > t, \\ B_+(t)A_+(t'), & t' < t. \end{cases} \quad (47)$$

В СВК есть также обратный к T_+ оператор T_- , который действует только на операторы состояний отрицательной энергии и упорядочивает их в обратном порядке, когда время уменьшается справа налево:

$$T_-[A_-(t')B_-(t)] = \begin{cases} B_-(t)A_-(t'), & t' > t, \\ A_-(t')B_-(t), & t' < t. \end{cases} \quad (48)$$

В общем случае же вводится оператор симметричного хронологического упорядочивания $\hat{T}$ как произведение предыдущих двух операторов $\hat{T} = T_+T_-$. Он имеет свойства $\hat{T}A_+ = T_+A_+$, $\hat{T}A_- = T_-A_-$ и действует на операторы обоих знаков энергии избирательно, упорядочивая их в обратном порядке. В частности, при $t' > t$ получаем:

$$\hat{T}[A_+(t')B_+(t)A_-(t')B_-(t)] = [A_+(t')B_+(t)][B_-(t)A_-(t')]. \quad (49)$$

3.2. Причинные пропагаторы полей

Причинные пропагаторы ШФ $G_c(x-x')$ появляются в СВК естественным образом без ручной перестановки операторов поля, как это было в прежней стандартной формулировке КТП. Для скалярного поля G_c есть функция Грина при граничных условиях ШФ, соответствующих распространению вперёд во времени решений с положительной энергией и назад во времени с отрицательной энергией.

Для уравнения Клейна-Гордона с источником $j(x)$:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = j(x) \quad (50)$$

пропагаторы $G_{c\pm}(x'-x)$ определяются для решений двух знаков энергии как:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)G_{c\pm}(x'-x) = \delta^4(x'-x). \quad (51)$$

Соответствующее решение уравнений поля (50), учитывающее трансляционную инвариантность и граничные условия ШФ, имеет вид:

$$\begin{aligned}\phi(x') &= \phi^{(0)}(x') + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3x G_{c+}(x'-x) j(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3x G_{c-}(x'-x) j(x).\end{aligned}\quad (52)$$

Здесь $\phi^{(0)}$ есть решение однородного уравнения с этими же граничными условиями, $G_{c+}(x'-x) \sim \theta(t'-t)$ описывает перенос положительной энергии вперёд во времени, а $G_{c-}(x'-x) \sim \theta(t-t')$ - перенос отрицательной энергии назад во времени.

Пределы второго интеграла по времени в (52) переставлены (переход от будущего к прошлому) и поэтому интегралы двух слагаемых нельзя просто объединить, так что полный причинный пропагатор G_c нельзя представить как сумму G_{c+} и G_{c-} . Однако, пределы второго интеграла можем перевернуть, чтобы он стал таким же, как первый интеграл. Это даёт знак минус перед G_{c-} , а (52) принимает более компактный вид:

$$\phi(x) = \phi^{(0)}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' [G_{c+}(x-x') - G_{c-}(x-x')] j(x'), \quad (53)$$

или

$$\phi(x) = \phi^{(0)}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' G_c(x-x') j(x'), \quad (54)$$

$$G_c(x) = G_{c+}(x) - G_{c-}(x), \quad (55)$$

Таким образом, при выражении обратного во времени интеграла через интеграл в прямом направлении причинный пропагатор ШФ G_c даётся разностью G_{c+} и G_{c-} .

Причинные пропагаторы для комплексного скалярного поля $G_{c\pm}$ определяются как взаимно обратные хронологические произведения операторов полей для двух знаков энергии:

$$iD_{c\pm}(x'-x) = \langle 0 | T_{\pm} [\phi_{\pm}(x') \phi_{\pm}^*(x)] | 0 \rangle. \quad (56)$$

Подстановка частотных разложений даёт (вычисления приведены детально для того, чтобы показать наглядно различия со стандартным подходом):

$$\begin{aligned}iD_{c+}(x'-x) &= \langle 0 | T_+ [\phi_+(x') \phi_+^*(x)] | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \phi_+(x') \phi_+^*(x) | 0 \rangle \theta(t'-t) + \langle 0 | \phi_+^*(x) \phi_+(x') | 0 \rangle \theta(t-t') = \\ &= \int d\tilde{k} d\tilde{k}' [\langle 0 | a_k a_k^* | 0 \rangle \theta(t'-t) e^{-i(k'x' - kx)} + \langle 0 | a_k^* a_k | 0 \rangle \theta(t-t') e^{i(k'x' - kx)}] = \\ &= \int d\tilde{k} \theta(t'-t) e^{-ik(x'-x)}.\end{aligned}\quad (57)$$

$$\begin{aligned}iD_{c-}(x'-x) &= \langle 0 | T_- [\phi_-(x') \phi_-^*(x)] | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \phi_-^*(x) \phi_-(x') | 0 \rangle \theta(t'-t) + \langle 0 | \phi_-(x') \phi_-^*(x) | 0 \rangle \theta(t-t') = \\ &= \int d\tilde{k} d\tilde{k}' [\langle 0 | a_{-k}^* a_{-k'} | 0 \rangle \theta(t'-t) e^{-i(k'x' - kx)} + \langle 0 | a_{-k'} a_{-k}^* | 0 \rangle \theta(t-t') e^{i(k'x' - kx)}] = \\ &= - \int d\tilde{k} \theta(t-t') e^{ik(x'-x)}.\end{aligned}\quad (58)$$

Поскольку в дальнейшем будет удобным переводить интегралы обратно по времени в обычные интегралы по времени, что меняет знак, то это изменение знака удобно не

указывать явно, а объединить с оператором хронологического упорядочения, определив, что оператор $\hat{T}$ меняет также и знак перед T_- . Полный причинный пропагатор в (54)-(55) тем самым принимает стандартный вид:

$$\begin{aligned} iD_c(x'-x) &= \langle 0 | \hat{T} \phi(x') \phi^*(x) | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \phi_+(x') \phi_+^*(x) | 0 \rangle \theta(t'-t) - \langle 0 | \phi_-(x') \phi_-^*(x) | 0 \rangle \theta(t-t') = \\ &= \int d\tilde{k} [\theta(t'-t) e^{-ik(x'-x)} + \theta(t-t') e^{ik(x'-x)}]. \end{aligned} \quad (59)$$

Стандартный результат ведёт и к стандартному импульсному представлению:

$$iD_c(x'-x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ik(x'-x)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (60)$$

Причинные пропагаторы для фермионов $S_{c\pm}(x)$ получим аналогично, рассмотрев хронологические произведения операторов полей в двух направлениях времени:

$$iS_{c\pm}(x'-x) = \langle 0 | T_{\pm} [\psi_{\pm}(x') \bar{\psi}_{\pm}(x)] | 0 \rangle. \quad (61)$$

Вычисления также приводятся детально:

$$\begin{aligned} iS_{c+}(x'-x) &= \langle 0 | T_+ [\psi_+(x') \bar{\psi}_+(x)] | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \psi_+(x') \bar{\psi}_+(x) | 0 \rangle \theta(t'-t) - \langle 0 | \bar{\psi}_+(x) \psi_+(x') | 0 \rangle \theta(t-t') = \\ &= (2m)^2 \sum_{\alpha'\alpha} \int d\tilde{p} d\tilde{p}' [\theta(t'-t) \langle 0 | b_{p'\alpha'} b_{p\alpha}^+ | 0 \rangle u_p^{\alpha'} \bar{u}_p^{\alpha} e^{-i(p'x'-px)} - \\ &\quad - \theta(t-t') \langle 0 | b_{p\alpha}^+ b_{p'\alpha'} | 0 \rangle v_p^{\alpha'} \bar{v}_p^{\alpha} e^{i(p'x'-px)}] = \\ &= \sum_{\alpha} \int d\tilde{p} \theta(t'-t) (\gamma p + m) e^{-ip(x'-x)}, \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} iS_{c-}(x'-x) &= \langle 0 | T_- [\psi_-(x') \bar{\psi}_-(x)] | 0 \rangle = \\ &= -\langle 0 | \bar{\psi}_-(x) \psi_-(x') | 0 \rangle \theta(t'-t) + \langle 0 | \psi_-(x') \bar{\psi}_-(x) | 0 \rangle \theta(t-t') = \\ &= (2m)^2 \sum_{\alpha'\alpha} \int d\tilde{p} d\tilde{p}' [-\theta(t'-t) \langle 0 | b_{p\alpha}^+ b_{p'\alpha'} | 0 \rangle \bar{u}_p^{\alpha} u_p^{\alpha'} e^{-i(p'x'-px)} - \\ &\quad + \theta(t-t') \langle 0 | b_{-p'\alpha'} b_{-p\alpha}^+ | 0 \rangle v_p^{\alpha'} \bar{v}_p^{\alpha} e^{i(p'x'-px)}] = \\ &= -\sum_{\alpha} \int d\tilde{p} \theta(t-t') (-\gamma p + m) e^{ip(x'-x)}. \end{aligned} \quad (63)$$

В фермионных аналогах (51)-(55) запись интеграла в обратном направлении времени через интеграл в прямом направлении добавляет знак перед $S_{c-}(x)$. Поэтому полный пропагатор $S_c(x)$, в конечном итоге, тоже совпадает со стандартным:

$$\begin{aligned}
iS_c(x'-x) &= iS_{c+}(x'-x) - iS_{c-}(x'-x) = \langle 0 | \hat{T} \psi(x') \bar{\psi}(x) | 0 \rangle = \\
&= \langle 0 | \psi_+(x') \bar{\psi}_+(x) \theta(t'-t) - \psi_-(x') \bar{\psi}_-(x) \theta(t-t') | 0 \rangle = \\
&= \int d\tilde{p} \sum_p \left[\theta(t'-t) (\gamma p + m) e^{-i\omega_p(t'-t)} + \theta(t-t') (-\gamma p + m) e^{i\omega_p(t'-t)} \right] e^{ip(x'-x)} \quad (64) \\
&= -(i\gamma \partial + m) D_c(x'-x).
\end{aligned}$$

Таким образом, в СВК симметричное по времени упорядочение операторов с помощью $\hat{T}$ (с учётом изменения знака перед T_- из-за объединения интегрирований по времени) заменяет прежние «правила» построения причинных пропагаторов, которые состояли в ручной перестановке операторов полей для получения нужного результата.

4. Взаимодействующие поля и диаграммная техника в СВК

4.1. Представление взаимодействия и теория возмущений

В СВК два типа вкладов в свободный гамильтониан являются аддитивными $H_0 = H_{0+} + H_{0-}$, а зависимость свободного поля φ от времени имеет вид $\varphi_{\pm}(t) = e^{\mp iH_{0\pm}t} \varphi_{\pm}(0) e^{\pm iH_{0\pm}t}$.

Эволюция во времени взаимодействующих полей описывается с помощью гамильтониана взаимодействия H_I . При аддитивном вкладе взаимодействий с положительной и отрицательной энергиями $H_I = H_{I+} + H_{I-}$ эволюция во времени даётся оператором эволюции:

$$U(t, t_0) = \hat{T} \exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' [\theta(t-t_0) H_{I+}(t') + \theta(t_0-t) H_{I-}(t')] \right), \quad (65)$$

где $\hat{T} = T_+ T_-$ - симметричный по времени оператор, определённый в (49).

В общем случае имеется смешанная часть взаимодействия $H_{I+-} = \tilde{H}_{I+} \tilde{H}_{I-}$, приводящая, в частности, к рождению и уничтожению пар, и

$$H_I = H_{I+} + H_{I-} + \tilde{H}_{I+} \tilde{H}_{I-}. \quad (66)$$

По этой причине интегралы в обратном направлении времени в (65) надо записать через интегралы в прямом направлении, как это было сделано для свободного лагранжиана в разделе 2.1, отнеся изменения знаков к пропагаторам, как это было сделано в разделе 3.2. С учётом этих уточнений, (65) можем записать в более компактном виде:

$$U(t, t_0) = \hat{T} \exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right). \quad (67)$$

В теории возмущений S -оператор, определяемый как $\hat{S} = U(\infty, -\infty)$, принимает вид:

$$\hat{S} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \hat{T} [H_I(t_1) \dots H_I(t_n)]. \quad (68)$$

4.2. Диаграммная техника

Для двухточечной функции модифицированная теорема Вика принимает вид:

$$\begin{aligned}\hat{T}[\phi(x')\phi^*(x)] &=:\phi(x')\phi^*(x): + \langle 0|\hat{T}[\phi(x')\phi^*(x)]|0\rangle = \\ &=:\phi(x')\phi^*(x): + iD_c(x'-x),\end{aligned}\quad (69)$$

где $:A:$ – нормальное упорядочение, и аналогично для фермионов. В диаграмме электрон-позитронной петли выражение $\hat{T}[H_I(x')H_I(x)]$ даёт стандартные формулы:

$$\begin{aligned}\hat{T}[H_I(x')H_I(x)] &= T_+[\psi_{j+}(x')\bar{\psi}_{m+}(x)]\gamma_{\mu mn}T_-[\psi_{n-}(x)\bar{\psi}_{i-}(x')]\gamma_{ij}^{\mu} = \\ &= -S_{c+}(x'-x)_{jm}\gamma_{\mu mn}S_{c-}(x-x')_{ni}\gamma_{ij}^{\mu}, \quad t' > t,\end{aligned}\quad (70)$$

$$\begin{aligned}\hat{T}[H_I(x')H_I(x)] &= T_-[\psi_{j-}(x')\bar{\psi}_{m-}(x)]\gamma_{\mu mn}T_+[\psi_{n+}(x)\bar{\psi}_{i+}(x')]\gamma_{ij}^{\mu} = \\ &= -S_{c-}(x'-x)_{jm}\gamma_{\mu mn}S_{c+}(x-x')_{ni}\gamma_{ij}^{\mu}, \quad t' < t.\end{aligned}\quad (71)$$

Итак, отличия между СВК и стандартной диаграммной техникой в том, что:

- Вместо операторов античастиц фигурируют операторы частиц отрицательной энергии, и интегрирование по времени для них идёт в прошлое;
- хронологический порядок зависит от знака энергии и симметричен во времени.

Эти различия фактически были учтены в стандартной диаграммной технике эффективно, введя некоторые формальные правила (нормального упорядочения, построения пропагаторов и т. д.) [5,6]. Это и объясняет тот факт, что прежние результаты в основном совпадают с результатами СВК.

5. Заключение

При квантовании релятивистских полей с состояниями отрицательной энергии нормы состояний поля отрицательны, но это меняет лишь знак волновой функции, а вероятности состояний, как билинейные комбинации волновых функций, остаются положительными.

В СВК, сформулированной в статье и основанной на интерпретации ШФ, интегрирование по времени в функции действия и в теории возмущений идёт в обоих направлениях времени в зависимости от знака энергии. Запись интегралов обратно во времени через интегралы вперёд во времени, делающая формулы более компактно, ведёт к изменению знака.

Показано, что КТП с частицами обоих знаков энергии, идущими во взаимно обратных направлениях времени, эквивалентна теории с античастицами положительной энергии, но не содержит нулевой энергии и нулевого заряда вакуума. Отсутствие вклада свободных полей в энергию вакуума в основном решает проблему космологической постоянной.

В СВК вводится оператор симметричного во времени хронологического упорядочения $\hat{T} = T_+T_-$, который прямо приводит к причинным пропагаторам ШФ без ручной перестановки операторов. Поэтому СВК модифицируют диаграммную технику, учитывая указанные выше обстоятельства, но сохраняет конечные результаты стандартной диаграммной техники и тем самым корректно описывает известные наблюдательные эффекты.

Таким образом, СВК с последовательным проведением интерпретации ШФ в КТП можно рассматривать как шаг к состоятельной и конечной КТП.

Применения СВК калибровочным теориям со спонтанным нарушением симметрии и механизмом генерации массы будут рассмотрены во второй статье и в книге [8].

Приложения.

А. Гармонический осциллятор с комплексными координатами и состояниями отрицательной энергии

Рассмотрим гармонический осциллятор с комплексными координатами q и q^* , имеющий состояния с отрицательной энергией. Лагранжиан и гамильтониан имеют вид:

$$L = m(\dot{q}^* \dot{q} - \omega^2 q^* q), \quad H = \frac{1}{m}(p p^* + m^2 \omega^2 q^* q), \quad (72)$$

где $p = \partial L / \partial \dot{q} = m \dot{q}^*$, $p^* = \partial L / \partial \dot{q}^* = m \dot{q}$ и m - масса. Канонические уравнения $\dot{p} = -\partial H / \partial q$, $\dot{p}^* = -\partial H / \partial q^*$ дают уравнения движения $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$, $\ddot{q}^* + \omega^2 q^* = 0$ и их решения есть суммы вкладов положительной и отрицательной энергии:

$$\begin{aligned} q &= q_+ + q_- = (2m\omega)^{-1}(a_+ e^{-i\omega t} + a_- e^{i\omega t}), \\ q^* &= q_+^* + q_-^* = (2m\omega)^{-1}(a_+^* e^{i\omega t} + a_-^* e^{-i\omega t}). \end{aligned} \quad (73)$$

Соответствующие импульсы имеют вид:

$$\begin{aligned} p &= p_+ + p_- = (i/2)(a_+^* e^{i\omega t} - a_-^* e^{-i\omega t}), \\ p^* &= p_+^* + p_-^* = -(i/2)(a_+ e^{-i\omega t} - a_- e^{i\omega t}). \end{aligned} \quad (74)$$

Операторы рождения-уничтожения выражаются через канонические переменные как:

$$a_{\pm} = (m\omega q_{\pm} \pm i p_{\pm}^*) e^{\pm i\omega t}, \quad a_{\pm}^* = (m\omega q_{\pm}^* \mp i p_{\pm}) e^{\mp i\omega t}. \quad (75)$$

Квантование даёт коммутаторы для канонических переменных:

$$\begin{aligned} [q, p] &= (qp - pq) = \frac{i}{4m\omega}([a_+, a_+^*] - [a_-, a_-^*]) = i, \\ [q^*, p^*] &= i, \quad [q, q^*] = [p, p^*] = 0. \end{aligned} \quad (76)$$

При этом коммутаторы операторов рождения-уничтожения равны:

$$[a_+, a_+^*] = 2m\omega, \quad [a_-, a_-^*] = -2m\omega. \quad (77)$$

Основные состояния определяются как $a_{\pm}|0_{\pm}\rangle = 0$, а возбуждённые состояния:

$$a_{\pm}^*|n_{\pm}\rangle = \sqrt{n_{\pm}+1}|n_{\pm}+1\rangle, \quad a_{\pm}|n_{\pm}\rangle = \sqrt{n_{\pm}}|n_{\pm}-1\rangle, \quad n_{\pm} = 0, 1, \dots \quad (78)$$

Полный гамильтониан H и оператор числа квантов N имеют вид:

$$\begin{aligned} H &= H_+ + H_- = \omega(a_+^* a_+ + a_-^* a_-) / 2m\omega, \\ N &= N_+ + N_- = (a_+^* a_+ - a_-^* a_-) / 2m\omega. \end{aligned} \quad (79)$$

Как видим, уровни энергии эквидистантны, а в основном состоянии нет нулевой энергии.

Это соответствует спектру чисто вращательных уровней планарного (плоского) осциллятора (т.е. гармонического ротатора), где есть две моды с противоположными направлениями вращения (кванты и анти-кванты), а энергия вращательных мод пропорциональна угловому моменту $E_{n\pm} = |J_{n\pm}| \omega$, который квантован $J_{n\pm} = n_{\pm} \hbar$. Антикванты эквивалентны квантам отрицательной энергии, которые идут назад во времени. Факт отсутствия нулевой энергии в (79) не меняется и при переходе к антиквантам положительной энергии, так как $\langle 0_- | H_- | 0_- \rangle = \langle 0_{a+} | H_{a+} | 0_{a+} \rangle$.

Таким образом, теория комплексного гармонического осциллятора, содержащего состояния с отрицательной энергией, последовательна и согласуется с интерпретацией ШФ, а лагранжиан (72) приводит к гамильтониану (79) без нулевой энергии.

Отметим, что хотя отрицательный знак второго коммутатора в (77) и ведёт к отрицательной норме состояний с отрицательной энергией, однако, как было показано в разделе 2.2 для скалярного поля, это меняет лишь знак волновой функции, определяемой как матричный элемент от канонической координаты (21), а вероятности состояний, которые даются квадратом модуля волновой функции, остаются положительными.

Б. Состоятельная теория струн без конформной аномалии

Теории релятивистских струн основаны на том факте, что при квантовании они приводят к критическому измерению пространства-времени: $D = 26$ для бозонных и $D = 10$ для фермионных струн (включая суперструны). Фактически критическая размерность является следствием наличия расходящихся нулевых энергий струнных мод (см. детали в [8]). Она возникает из требования устранения аномалий, возникающие из-за остаточного вклада нулевой энергии струнных мод после их «регуляризации».

Рассмотрим применение СВК к струнам. Для бозонной струны действие имеем вид:

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X_\mu \partial_\beta X^\mu = -T \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \int d\sigma \partial_\alpha Y_\mu^* \cdot \partial^\alpha Y^\mu, \quad (80)$$

где $Y^\mu = (X_R^\mu + iX_L^\mu) / \sqrt{2}$, $Y^{\mu*} = (X_R^\mu - iX_L^\mu) / \sqrt{2}$ - это две моды положительной энергии идущие в противоположных направлениях. В СВК одна из мод берётся как основная, например, правая с положительной энергией $Y_+^\mu(\tau - \sigma)$, идущая вперёд во времени, а левую положительно-энергетическую моду $Y_+^\mu(\tau + \sigma)$ тогда можно описать как ту же правую, но с отрицательной энергией и движущуюся назад во времени.

Для замкнутых струн частотные моды для комплексных координат принимают вид:

$$Y^\mu(\tau - \sigma) = Y_0^\mu + \frac{il}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)} + \alpha_{-n}^\mu e^{2in(\tau - \sigma)}),$$

$$Y^{\mu*}(\tau - \sigma) = Y_0^{\mu*} - \frac{il}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_n^{\mu*} e^{2in(\tau - \sigma)} + \alpha_{-n}^{\mu*} e^{-2in(\tau - \sigma)}), \quad (81)$$

где $l^2 = 1/\pi T$. Здесь времена τ умножаются только на положительные «частоты» с $n > 0$. Сохраняющиеся импульсы, соответствующие $Y^\mu, Y^{\mu*}$, есть $P_{\alpha\pm}^\mu = \pm T \partial_\alpha Y_\pm^{\mu*}$, $\partial^\alpha P_{\alpha\pm}^\mu = 0$, а их коммутаторы имеют вид:

$$[Y_\pm^\mu(\tau, \sigma'), P_{\tau\pm}^\nu(\tau, \sigma)] = -i\eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (82)$$

Подстановка (81) даёт (отличные от нуля) коммутаторы для мод:

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^{\nu*}] = [\alpha_{-n}^{\nu*}, \alpha_{-m}^\mu] = -m \delta_{mn} \eta^{\mu\nu}. \quad (83)$$

В СВК гамильтониан в итоге принимает вид:

$$H = T^{-1} \int_0^{2\pi} d\sigma P_{\alpha\pm} P_{\pm}^{\alpha*} = H_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^{\mu*} \alpha_{n\mu} + \alpha_{-n}^{\mu*} \alpha_{-n\mu}), \quad (84)$$

где H_0 содержит независимые от n конечные члены. Таким образом, нулевой энергии нет и теория последовательна.

Операторы L_m алгебры Вирасоро автоматически нормально-упорядочены $L_0|0\rangle = 0$, и их коммутаторы не содержат аномалии:

$$L_m = L_{m+} + L_{m-} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m+n}^{\mu*} \alpha_{n\mu}, \quad (85)$$

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}.$$

Поэтому алгебра операторов группы Лоренца замкнута и нет аномальных членов.

Итак, в СВК у бозонной струны нет нулевой энергии и соответствующих аномалий, что означает, что в ней нет нужды в критическом измерении D . Аналогичная ситуация имеет место и для фермионной струны, где также нет нулевой энергии [8].

Таким образом, в СВК теория струн становится последовательной и достаточно простой и совместима с гравитацией из-за отсутствия энергии вакуума. Но в этой форме теория струн не может решить проблемы объединения, так как если нет нулевой энергии мод, то не будет и конформной аномалии, следовательно, и нет оснований для фиксации размерности пространства и введения высших измерений.

Литература

1. Stueckelberg E.C.G. (1941) *Helv. Phys. Acta*, **14**, 588.
2. Feynman R. (1949) *Phys. Rev.*, **76**, 749.
3. Бьёркен Дж., Дрелл С. (1978) *Релятивистская квантовая теория*, т. 1. М.
4. Pauli W. (1943) *Rev. Mod. Phys.* **15**, 175
5. Бьёркен Дж., Дрелл С. (1978) *Релятивистская квантовая теория*, т. 2. М.
6. Райдер Л. (1987) *Квантовая теория поля*. М.
7. Вайнберг С. (1989) *УФН*, **148**(4), 639.
8. Закир З. (2023) *Конечная квантовая теория поля*. ЦТФА, Т.