

Теория фрозаров и её наблюдаемые эффекты. 2. Полное решение для коллапсирующей пылевой звезды

Захид Закир¹

Аннотация

Решение Оппенгеймера-Снайдера (ОС) уравнений Эйнштейна для однородной пылевой звезды при параболической скорости ($k=0$), а также решение для эллиптической скорости ($k=\pm 1$), полученные О. Клейном и С. Вайнбергом двумя другими методами, описывают коллапс в координатах Шварцшильда r, t . Приведено полное решение задачи коллапса пылевой звезды этими тремя методами для всех трёх скоростей, сохраняющих локальную однородность плотности энергии материи - параболической, гиперболической и эллиптической ($k=0, \pm 1$). Приведены графики мировых линий визуализирующих внутреннюю структуру звезды на гиперповерхностях одновременности $t=\text{const}$. Из них видно, что при большом, но конечном t , когда поверхность асимптотически застывает над гравитационным радиусом звезды, каждый внутренний слой также застывает вблизи своей асимптоты, соответствующей эффективному гравитационному радиусу для данного слоя. В результате коллапс звезды ведёт к образованию фрозара с полностью застывшей внутренней структурой. На поздних стадиях коллапса, когда локальные скорости близки к скорости света, различия в начальных скоростях незначительны и все решения стремятся к параболическому. Поэтому после застывания наблюдаемые эффекты будут такими же, как и изученные в первой статье.

Ключевые слова: релятивистские звёзды, гравитационный коллапс, застывшие звёзды, фрозары, чёрные дыры, горизонт, сингулярность

Содержание

Введение.....	2
1. Коллапс тонкой пылевой оболочки с образованием полого фрозара	3
1.1. Траектории частиц оболочки в шварцшильдовском поле самой оболочки.....	3
1.2. Связь между собственным временем на оболочке и мировым временем	6
1.3. Метрика и мировые линии пробных частиц внутри оболочки.....	7
2. Полное решение для пылевой звезды в глобальных координатах	7
2.1. Решение Толмана для пыли в локальных сопутствующих координатах	7
2.2. Преобразование решений из сопутствующих в статические координаты	9
2.3. Решение для однородной пылевой звезды методом ОС.....	10
2.4. Решение методом Клейна.....	12
2.5. Решение методом Вайнберга	14
3. Внутренняя структура и эволюция застывающей пылевой звезды.....	15
3.1. Мировые линии частиц слоёв и их асимптоты	15
3.2. Внутренняя метрика и её асимптотики	18
Заключение.....	20
Приложение. Вывод выражения для вспомогательной функции u	21
Литература	23

¹ Центр теоретической физики и астрофизики, Ташкент Узбекистан, zzakir@ggph.uz ORCID

Введение

В первой статье [1] были изучены следствия решения уравнений Эйнштейна внутри сферической однородной пылевой звезды при параболической скорости частиц ($k = 0$) в координатах Шварцшильда (t, r, θ, φ) . Это решение было получено Оппенгеймером и Снайдером (ОС) [2] преобразованием решения Фридмана [3] в сопутствующих координатах (в форме Толмана [4]) в координаты Шварцшильда.

Такое преобразование из локальных координат в глобальные нужно как для сшивания на поверхности с внешним решением Шварцшильда, заданным в тех же глобальных координатах статической системы, так и для корректного с физической точки зрения описания структуры звезды заданием положений всех её слоёв одновременно с поверхностью.

Позже О. Клейн [5] и С. Вайнберг [6] двумя другими методами получили решение в координатах Шварцшильда для эллиптической скорости ($k = +1$), когда частицы звезды в начальный момент покоятся. Как решение ОС, так и Клейна и Вайнберга долгое время не были должным образом поняты по методологическим и историческим причинам.

Во-первых, всё это время отсутствовало понимание ключевой роли того факта, что локальные сопутствующие системы отсчёта не имеют общей гиперповерхности одновременности и поэтому решения в этих координатах не дают положения слоёв звезды одновременно с поверхностью, а значит не определяют мгновенную структуру звезды в целом.

Во-вторых, глобальные решения более сложны, а и их выводы более громоздки, к тому же и трудно воспроизводимые из-за отсутствия деталей вывода в литературе. В статье ОС, например, ключевая вспомогательная функция $y(R, r)$, являющаяся главной частью их точного решения, была приведена без вывода (такой вывод был дан в [7,8]).

В-третьих, решения ОС и Клейна в глобальных координатах r, t практически не были представлены в литературе, а решение Вайнберга, приведённое в его книге также без вывода, преподносилось лишь как эквивалентная форма более простого решения в локальных координатах.

Поскольку глобально определённые решения не были поняты и оказались практически забытыми, то физически корректное решение астрофизической задачи, состоящее в определении структуры звезды как набора одновременных событий, было заменено более простым, но половинчатым решением, описанием звезды через неодновременные локальные события.

Для преодоления этого кризиса в релятивистской астрофизике требуется изменение парадигмы, включающее три основных пункта. Во-первых, структуру протяжённых объектов, в частности звёзд, необходимо описывать на глобальных гиперповерхностях одновременности, где покоятся их центры инерции и где симметрии упрощают физическую картину. Во-вторых, нахождение локальных решений в удобных координатах должно считаться лишь первым этапом описания, после которого из этих локальных решений необходимо построить глобально-заданные решения на гиперповерхностях одновременности. В-третьих, под

структурой таких объектов понимать физическую картину, следующую только из глобальных решений, описывающих объект в данный момент мирового времени как систему из одновременно сосуществующих частиц.

В статье [7] методом ОС было получено полное решение для пылевой звезды для всех трёх скоростей, при которых сохраняется локальная однородность звезды – параболической, эллиптической и гиперболической, включая и вывод функции $y(R, r)$. В решении Фридмана эти скорости соответствуют пространствам постоянной кривизны с $k = 0, \pm 1$.

В данной статье даются полное решение задачи коллапса пылевой звезды для всех трёх скоростей $k = 0, \pm 1$ всеми тремя методами - ОС, Клейна и Вайнберга. Результаты этих трёх методов, естественно, совпадают, так как удовлетворяют одним и тем же уравнениям Эйнштейна. Найдены выражения для асимптот слоёв звезды при больших t , а также построены графики траекторий частиц в слоях звезды, которые показывают образование при общерелятивистском коллапсе застывшей звезды, или фрозара во всех трёх режимах скорости. Систематическое изложение теории фрозаров и её применений будет дано в книге [9].

В разделе 1 описывается эволюция поверхности звезды в собственном гравитационном поле. В разделе 2 представлены решение для локально-однородной пылевой звезды и полные решения модели в координатах Шварцшильда. В разделе 3 изучаются структура и эволюция пылевой звезды с образованием фрозаров и представлены графики мировых линий. В Приложении приведён вывод функции $y(R, r)$ в методе ОС.

1. Коллапс тонкой пылевой оболочки с образованием полого фрозара

1.1. Траектории частиц оболочки в шварцшильдовском поле самой оболочки

Пространственно-временной интервал на сферической оболочке и вне её в статических координатах (t, r, θ, φ) в общем случае имеет вид:

$$ds^2 = \beta(t) \alpha_r dt^2 - \alpha_r^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad r \geq r_b, \quad (1)$$

где $\alpha_r \equiv 1 - r_g / r$, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$, $r_g = 2mG$, G - гравитационная константа и $r_b(t)$ - радиус окружности оболочки (в обозначениях ОС [2] и [10]). Вне оболочки поле статическое и естественно выбрать $\beta(t) = 1$, когда t совпадает с собственным временем удалённых наблюдателей, и это даёт метрику Шварцшильда.

Пусть начальная радиальная координата оболочки $r = R$ зафиксирована при $\tau(R, R) = 0$, где $\tau(R, r)$ - собственное время. Условие сохранения энергии тогда принимает вид:

$$\frac{\alpha_r}{1 - v_r^2} = 1 - k \frac{r_g}{R}, \quad k = 0, \pm 1 \quad (2)$$

что даёт выражение для локальной радиальной скорости:

$$v_r^2 = \frac{1}{\alpha_r^2} \frac{dr^2}{dt^2} = \frac{r_g}{r} \frac{1 - kr / R}{1 - kr_g / R}. \quad (3)$$

Параболическая скорость ($k = 0$) соответствует падению из покоя при $r \rightarrow \infty$, эллиптическая скорость ($k = +1$) – падению из покоя $v_R = 0$ при $\tau = 0$ и $r = R < \infty$, а гиперболическая ($k = -1$) - скорости v_R , определяемой из (3), которая больше параболической при $r = R$. При этих специальных скоростях частицы первоначально однородной пыли падают радиально, оставаясь однородным вдоль оболочки.

Собственное время частиц оболочки найдём из (1) и (3):

$$d\tau^2 = \alpha_r dt^2 - \alpha_r^{-1} dr^2 = \frac{dr^2}{\alpha_r} (v_r^{-2} - 1) = \frac{r}{r_g} \cdot \frac{dr^2}{1 - kr/R}, \quad (4)$$

что ведёт к интегралу:

$$\tau(R, r) = \frac{R^{1/2}}{r_g^{1/2}} \int_{r(\tau)}^R \frac{dr r^{1/2}}{(R - kr)^{1/2}}. \quad (5)$$

Интегрирование даёт $\tau(R, r)$, мировую линию $r(R, \tau)$ в неявной форме:

$$\tau(R, r) = \tau_R^{(k)} + \frac{R^{3/2}}{r_g^{1/2}} \left(\operatorname{arccosh} \frac{r^{1/2}}{R^{1/2}} + k \left[\frac{r}{R} \left(1 - \frac{kr}{R} \right) \right]^{1/2} \right), \quad (6)$$

$$\tau_R^{(+1)} = 0, \quad \tau_R^{(-1)} = [2^{1/2} - \ln(1 + 2^{1/2})] R^{3/2} / r_g^{1/2}. \quad (7)$$

Здесь $\operatorname{arccosh}$ есть $\arccos$ при $k = 1$ и $\operatorname{arccosh}$ при $k = -1$.

Мировую линию в терминах t , т.е. $r(R, t)$, находим из (3):

$$t = \frac{(R - kr_g)^{1/2}}{r_g^{1/2}} \int_{r(t)}^R \frac{dr r^{3/2}}{(r - r_g)(R - kr)^{1/2}}. \quad (8)$$

Интегрирование даёт:

$$t - t_R^{(k)} = 2r_g \ln \frac{[r(R - kr_g)]^{1/2} + [r_g(R - kr)]^{1/2}}{[R(r - r_g)]^{1/2}} + \left[(R + 2kr_g) \operatorname{arccosh} \frac{r^{1/2}}{R^{1/2}} + k[r(R - kr)]^{1/2} \right] \left(\frac{R}{r_g} - k \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Для нахождения t' требуется явный вид $t_0(R)$ и его найдём из условия диагональности метрики в сопутствующей системе и условия $\tau' = 0$:

$$t_R^{(+1)} = 0, \quad t_R^{(-1)} = 2^{1/2} (R - 2r_g)(1 + R/r_g)^{1/2}. \quad (10)$$

Вместе с (9) это даёт искомые выражения для мировых линий.

Графики мировых линий $r(R, t)$ и $r(R, \tau)$ на Рис.1 показывают, что в обе кривые являются асимптотическими, т.е. при $t \rightarrow \infty$ обе они асимптотически приближаются к гравитационному радиусу: $r(R, t) \equiv r(R, \tau(R, t)) \rightarrow r_g$.

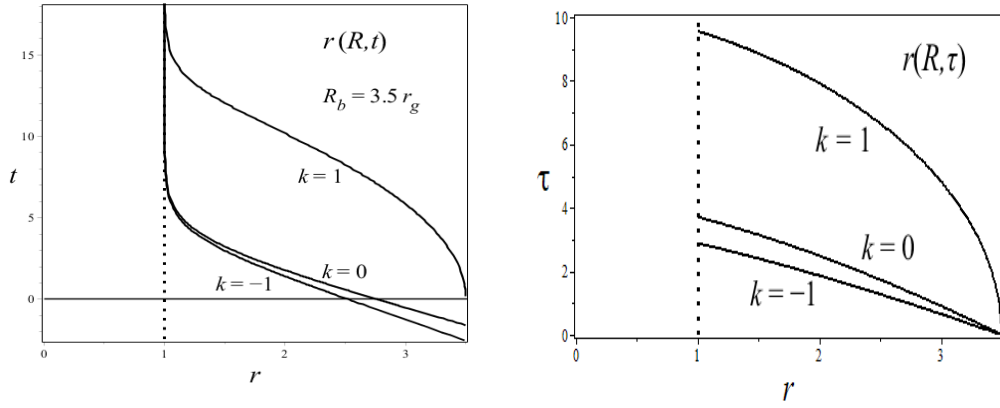


Рис. 1. Мировая линия $r = r(R, t) = r(R, \tau)$ частицы на поверхности звезды в терминах t (левый график) и τ (правый график), падающей от $R = 3.5$ при $\tau = 0$ (в единицах r_g). События на мировой линии $r = r(R, \tau)$ на правом рисунке - это те же события, что и на мировой линии $r = r(R, t)$ на левом рисунке, т.е. точки двух параметризаций одних и тех же событий на одной и той же мировой линии соответствуют друг другу один к одному. Таким образом, мировые линии $r(R, \tau)$ на правом графике также асимптотические и не пересекают r_g .

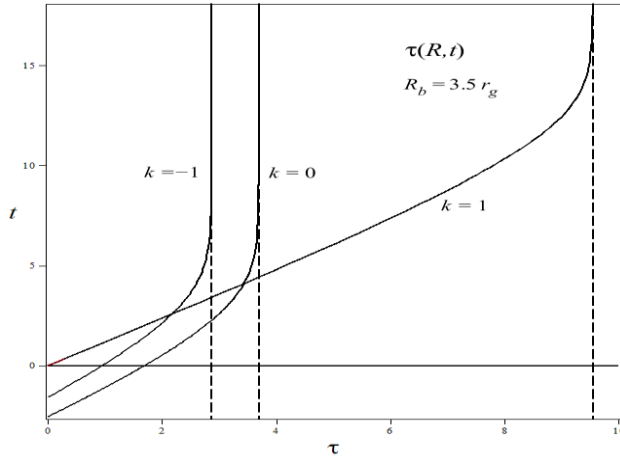


Рис. 2. Соотношение $\tau(R, t)$ между собственным временем τ и мировым временем t для частиц из Рис.1. Пунктирные линии - асимптоты τ_g из , - к которым стремятся собственные времена τ при $t \gg r_g$. Значения τ только приближаются к τ_g , никогда не достигая его при $t < \infty$, и поверхность остаётся снаружи r_g в терминах τ тоже.

График зависимости между двумя временами $\tau(R, t) \equiv \tau[R, r(R, t)]$ на Рис. 2 показывает, что при $t \rightarrow \infty$ собственное время $\tau(R, r(t))$ на любом слое R стремится к асимпте $\tau_g(R)$, выражение для которой представлено ниже.

Производная по времени $\dot{r}$ непосредственно следует из (4):

$$\dot{r} = -\frac{r_g^{1/2}}{r^{1/2}}(1 - kr/R)^{1/2}, \quad (11)$$

а $r' = \partial r / \partial R$ находим из формул (6) - (7) используя условие $\tau' = 0$:

$$r' = \frac{3}{2} - \frac{r}{2R} + \frac{3}{2} \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^{1/2} \arccos(r^{1/2} / R^{1/2}), \quad k = +1 \quad (12)$$

$$r' = \frac{3}{2} \left[2^{1/2} + \ln \left[\left(1 + \frac{r}{R} \right)^{1/2} + \frac{r^{1/2}}{R^{1/2}} \right] \right] \left(\frac{R}{r} + 1 \right)^{1/2} - \frac{3}{2} - \frac{r}{2R}, \quad k = -1 \quad (13)$$

Выражение для $\dot{t}$ следует из формул (3) и (11):

$$\dot{t} = - \frac{[r(R - kr_g)]^{1/2}}{[r_g(R - kr)]^{1/2}} \frac{\dot{r}}{\alpha_r} = \frac{(1 - kr_g / R)^{1/2}}{\alpha_r}. \quad (14)$$

1.2. Связь между собственным временем на оболочке и мировым временем

При $r > r_g$ как $t(R, r)$, так и $\tau(R, r)$ отмечают на оболочке одно и то же событие на одной и той же мировой линии одной и той же частицы (при фиксированных φ, θ). Таким образом, между моментами собственного времени τ и мирового времени t на оболочке существует взаимно-однозначное соответствие.

Случай параболической скорости с $k = 0$ детально изучался в первой статье [1] и поэтому перейдём к режимам скорости с $k = \pm 1$. Поскольку мировая линия $t(R, r)$ в любом режиме скорости асимптотически приближается к r_g , никогда не пересекая его, то та же самая мировая линия, параметризованная через $\tau(R, r)$, также приближается к r_g только асимптотически (Рис. 1b). Необратимость гравитационного замедления τ относительно t - это факт подтверждённый экспериментами. Здесь кинематическое замедление времени также необратимо, как в парадоксе близнецов, из-за ускоренного движения падающих частиц относительно статической системы отсчёта. Это видно также из зависимости $\tau(R, t)$, которую можно найти при $k = \pm 1$ только численно, вычисляя $t(R, r)$ и $\tau(R, r)$ при одном и том же r . Результат приведён на Рис. 2.

При $t \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow r_g$ собственное время падающей частицы асимптотически застывает, стремясь к моменту застывания $\tau_g^{(k)}$, который проявляется как асимптота, к которой стремится собственное время в соответствующем режиме скорости. Эти моменты мы находим из (6) как:

$$\tau_g^{(0)} = \frac{2}{3r_g^{1/2}} (R^{3/2} - r_g^{3/2}), \quad (15)$$

$$\tau_g^{(-)} = \frac{R^{3/2}}{r_g^{1/2}} \left(2^{1/2} - \frac{r_g}{R} \left(\frac{R}{r_g} + 1 \right)^{1/2} + \ln \left(\frac{r_g^{1/2} + (R + r_g)^{1/2}}{R^{1/2} (1 + 2^{1/2})} \right) \right), \quad (16)$$

$$\tau_g^{(+)} = r_g \left(\frac{R}{r_g} - 1 \right)^{1/2} + \frac{R^{3/2}}{r_g^{1/2}} \arccos \frac{r_g^{1/2}}{R^{1/2}}. \quad (17)$$

Мировые линии $t(R, r)$ во всех трёх режимах скорости асимптотически приближаются к r_g , никогда не пересекая его и поэтому те же самые мировые линии, параметризованные как $\tau(R, r)$, тоже приближаются к r_g асимптотически (Рис. 1b).

1.3. Метрика и мировые линии пробных частиц внутри оболочки

Внутри оболочки справедливо то же самое вакуумное решение (1):

$$d\tau^2 = \beta(t)\tilde{\alpha}_r dt^2 - \tilde{\alpha}_r^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad r < r_b(t), \quad (18)$$

но с $\tilde{\alpha}_r \equiv 1 - \tilde{r}_g / r$. Для того, чтобы не было сингулярности в центре, где нет материи, должно быть $\tilde{r}_g = 0$, что даёт $\tilde{\alpha}_r = 1$. Таким образом, пространство внутри оболочки является плоским.

Однако, в отличие от внешней области, поле внутри оболочки хотя и однородное, но не является статическим, так как выбор $\beta(t) = 1$ не позволяет сшить внешнюю и внутреннюю метрики. Для сшивания надо выбрать $\beta(t) = 1 - r_g / r_b(t)$, чтобы в каждый момент временная компонента метрики была равна значению на оболочке. В результате линейный элемент внутри оболочки принимает вид:

$$ds^2 = [1 - r_g / r_b(t)] dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad r < r_b(t). \quad (19)$$

Так как отлична от нуля только одна компонента метрики $g_{00} = \beta(t)$, то ненулевой оказывается также только одна компонента символов Кристоффеля:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} \frac{\dot{\beta}}{\beta} = \frac{r_g \dot{r}_b}{2r_b^2 (1 - r_g / r_b)} = -\frac{r_g^{3/2}}{r_b^{3/2}} \frac{(1 - kr_b / R)^{1/2}}{2(r_b - r_g)}. \quad (20)$$

Внутри оболочки свободные пробные частицы движутся прямолинейно, а для локально-покоящейся системе также и равномерно $d\mathbf{r} / d\tau = \text{const}$. Однако, их скорости в терминах мирового времени при $r_b(t) \rightarrow r_g$ будут быстро уменьшаться:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} [1 - r_g / r_b(t)]^{1/2} \rightarrow 0. \quad (21)$$

При застывании оболочки каждая из пробных частиц внутри неё также застынет около той точки, где она оказалась перед застыванием оболочки. Графики мировых линий таких частиц показаны на Рис. 3.

2. Полное решение для пылевой звезды в глобальных координатах

2.1. Решение Толмана для пыли в локальных сопутствующих координатах

Общее решение Толмана уравнений Эйнштейна внутри пылевой звезды $R \leq R_b$, где R_b - начальная радиальная координата поверхности, основано на линейном элементе в сопутствующих координатах [4]:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - e^{\lambda(\tau, R)} dR^2 - r^2(R, \tau) d\Omega^2 \quad (22)$$

и имеет вид (см. [9]):

$$e^\lambda = \frac{r'^2}{1 + kf}, \quad \dot{r}^2 = \frac{F}{r} + kf, \quad 8\pi G\rho = \frac{F'}{r'^2}. \quad (23)$$

Здесь $1 + kf > 0$, ρ локальная плотность энергии пылевого вещества и две функции $f(R)$, $F(R)$ следуют из дополнительных физических условий. В частности,

$F(R) = r_g$ при $R \geq R_b$, а в эллиптическом случае ($k = +1$) f следует из зануления скоростей при $r = R$:

$$\dot{r}^2 = \frac{F}{R} + f = 0. \quad f = -\frac{F}{R}. \quad (24)$$

Локальная однородность, т.е. независимость плотности от пространственных координат $\rho = \rho(\tau)$ для одних и тех же значений локального собственного времени (для «одновозрастных» событий), является первым таким условием. Упрощение может быть достигнуто выбором начального однородного распределения при $\tau = 0$ и одной из трёх выделенных скоростей, сохраняющих однородность с $k = 0, \pm 1$. Из (23) и (24) тогда следуют:

$$\dot{r} = -\frac{F^{1/2}}{r^{1/2}} \left(1 - \frac{kr}{R}\right)^{1/2}, \quad \tau(R, r) = \int_{r(R, r)}^R dr \left(\frac{F}{r} + kf\right)^{-1/2}. \quad (25)$$

Интегрирование даёт:

$$\tau(R, r) = \frac{R^{1/2}}{F^{1/2}} \left[2^{1/2} R - [r(R+r)]^{1/2} + R \ln \left(\frac{r^{1/2} + (R+r)^{1/2}}{R^{1/2}(1+2^{1/2})} \right) \right], \quad k = -1 \quad (26)$$

$$\tau(R, r) = \frac{R^{1/2}}{F^{1/2}} \left[[r(R-r)]^{1/2} + R \arccos(r^{1/2} / R^{1/2}) \right], \quad k = +1. \quad (27)$$

Для нахождения F , из (23) и условия однородности воспользуемся следующими соотношениями ($\kappa = 8\pi G / 3$):

$$F' = 3\kappa\rho(\tau)r^2r' = \kappa\rho(\tau)(r^3)', \quad (28)$$

$$F = \kappa\rho(\tau)r^3 = \kappa\rho(0)R^3 = \kappa\rho(0)R_b^3 \frac{R^3}{R_b^3}. \quad (29)$$

Затем, учитывая $r_g = 2GM = \kappa\rho(0)R_b^3$ и (24), приходим к выражениям:

$$F(R) = r_g \frac{R^3}{R_b^3} \equiv r_{g,R}, \quad f(R) = -\frac{r_{g,R}}{R}, \quad \rho(\tau) = \rho(0) \frac{R^3}{r^3}. \quad (30)$$

Используя f и F , можно вычислить из (25) не только $\dot{r}$, но и r' . Сначала из (28)-(30) получаем:

$$F' = \kappa\rho(\tau)r^2r' = \kappa\rho(0)R^3r' = 3r_g \frac{R^3}{rR_b^3} r', \quad (31)$$

что при сравнении с (30) даёт $F' = 3R^2r_g / R_b^3$, и в итоге находим:

$$r' = \frac{r}{R}, \quad (32)$$

т.е. r' одинаково для всех трёх специальных скоростей.

2.2. Преобразование решений из сопутствующих в статические координаты

Во внутренней области, следуя ОС преобразуем решение Толмана (22) в терминах R, τ к решению в терминах r, t . Это необходимо как для определения структуры звезды в целом на гиперповерхности $t = \text{const.}$, так и для сшивания на поверхности внутренней и внешней метрик.

Общерелятивистское преобразование координат:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'} \quad (33)$$

при переходе от $d\tau, dR$ к dt, dr принимает форму:

$$dt = \dot{t} d\tau + t' dR, \quad dr = \dot{r} d\tau + r' dR. \quad (34)$$

Преобразованная метрика $g_{i'k'}(r, t)$ в новом линейном элементе:

$$g_{i'k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} g_{ik} \quad (35)$$

в общем случае является недиагональной. Однако она должна быть диагональной, по крайней мере, на поверхности, чтобы сшиваться с внешней метрикой (1). Поэтому простейшее решение в терминах r, t следует искать в виде диагональной метрики.

Отметим, что мгновенная структура звезды как протяжённого объекта должна быть определена на глобальной гиперповерхности одновременности, совпадающей на поверхности с гиперповерхностью статической системы отсчёта $t = \text{const.}$ Это также предполагает наличие набора синхронизированных часов внутри, показывающих одинаковое с поверхностью мировое время t . Все это можно естественно реализовать при диагональной метрике, но сложно для недиагональной.

Таким образом, исходим из диагонального линейного элемента:

$$ds^2 = e^{\nu(r,t)} dt^2 - e^{\lambda(r,t)} dr^2 - r^2 d^2\Omega, \quad r \leq r_b, \quad (36)$$

с условием сшивания $e^{\nu(r_b,t)} = e^{-\lambda(r_b,t)} = 1 - r_g / r_b$. Подстановка (34) в (36) даёт:

$$ds^2 = (e^{\nu} \dot{t}^2 - e^{\lambda} \dot{r}^2) d\tau^2 - (e^{\lambda} r'^2 - e^{\nu} t'^2) dR^2 - r^2 d^2\Omega + 2(e^{\nu} \dot{t} t' - e^{\lambda} \dot{r} r') d\tau dR. \quad (37)$$

Используя (22)-(23), из (36)-(37) получаем:

$$g_{00}(\tau, R) = e^{\nu} \dot{t}^2 - e^{\lambda} \dot{r}^2 = 1, \quad g_{11}(\tau, R) = -(e^{\lambda} r'^2 - e^{\nu} t'^2) = -\bar{r}^2, \quad (38)$$

$$g_{01}(\tau, R) = e^{\nu} \dot{t} t' - e^{\lambda} \dot{r} r' = 0, \quad (39)$$

где $\bar{r}^2 = r'^2 / (1 + kf)$. Соотношения (38) позволяют выразить e^{λ} и e^{ν} :

$$e^{\lambda} = \frac{t'^2 + \dot{t}^2 \bar{r}^2}{\dot{t}^2 r'^2 - t'^2 \dot{r}^2}, \quad e^{\nu} = \frac{r'^2 + \bar{r}^2 \dot{r}^2}{\dot{t}^2 r'^2 - t'^2 \dot{r}^2}. \quad (40)$$

Условие диагональности (39), при подстановке (40), принимает вид:

$$g_{01} = \frac{(r'^2 + \bar{r}^2 \dot{r}^2) \dot{t} t' - (t'^2 + \dot{t}^2 \bar{r}^2) \dot{r} r'}{\dot{t}^2 r'^2 - t'^2 \dot{r}^2} = 0. \quad (41)$$

Рассматривая это условие как уравнение для t' :

$$t'^2 \dot{r} - t' \dot{t} r' \left(1 + \frac{\dot{r}^2}{1 + kf} \right) + \dot{t}^2 \dot{r} r'^2 = 0, \quad (42)$$

получаем два его решения:

$$t' = \frac{\dot{t} r'}{2 \dot{r}} \left([1 + \dot{r}^2 / (1 + kf)] \pm [1 - \dot{r}^2 / (1 + kf)] \right). \quad (43)$$

Выбор знака плюс даёт $t' = \dot{t} r' / \dot{r}$, что является нефизическим решением, так как расходится при $\dot{r} \rightarrow 0$. Выбор же знака минус даёт требуемое условие диагональности:

$$\frac{t'}{\dot{t}} = \frac{\dot{r} r'}{1 + kf}. \quad (44)$$

После исключения t' с использованием (44) метрика в (40) упрощается:

$$e^\lambda = \frac{1}{1 - F / r}, \quad e^\nu = \frac{1 + kf}{\dot{t}^2 (1 - F / r)}. \quad (45)$$

2.3. Решение для однородной пылевой звезды в методе ОС

В первой статье [1] было рассмотрено решение ОС для пылевой звезды для параболической скорости ($k = 0$). Здесь же изучим полное решение методом ОС также и для эллиптических и гиперболических скоростей ($k = \pm 1$) [5], из которых решение ОС для $k = 0$ следует как предельный случай при $r_g / R_b \ll 1$ или $k \rightarrow 0$.

Для определения мировой линии $r(t, R)$ в методе ОС [2] вводится $y_{(k)}(R, r)$ как вспомогательная переменная:

$$t = M_{(k)}(y_{(k)b}), \quad (46)$$

где вид функции M определяется из условия сшивания с внешней метрикой. Условие диагональности (44) в результате принимает вид:

$$\frac{t'}{\dot{t}} = \frac{y'_{(k)}}{\dot{y}_{(k)}} = \frac{\dot{r} r'}{1 - k r_{g,R} / R} = - \frac{(r_{g,R} r)^{1/2}}{R - k r_{g,R}} (1 - k r / R)^{1/2}. \quad (47)$$

Решая это уравнение относительно $y_{(k)}$ (см. Приложение 1), получаем:

$$y_{(k)}(R, r) = - \frac{R_b}{k r_g} \ln \left(\frac{(1 - k r_{g,R} / R)^{1/2} (1 - k r / R)}{(1 - k r_g / R_b)^{1/2}} \right). \quad (48)$$

На поверхности $R = R_b$ значение $y_{(k)}$ равно:

$$y_{(k)}(R_b, r) = -(R_b / k r_g) \ln(1 - k r_k / R_b). \quad (49)$$

Здесь r_k - это значения r с правильным сшиванием на поверхности как (49):

$$r_k = -[\exp(-k r_g y_{(k)} / R_b) - 1] R_b / k. \quad (50)$$

Вставив в (50) выражение для $y_{(k)}$ из (48), получаем $r_k(R, r)$ для всех слоёв:

$$r_k(R, r) = \frac{R_b}{k} \left(1 - \frac{(1 - kr_{g,R} / R)^{1/2} (1 - kr / R)}{(1 - kr_g / R_b)^{1/2}} \right). \quad (51)$$

Функция $M_{(k)}(y_{(k)b})$ из (46) должна совпадать с правой частью формулы (9) для $t(R, r)$. Поэтому, делая в (9) подстановки $R \rightarrow R_b$, а также $r \rightarrow r_k(R, r)$ из (51), получаем выражения для $t[R_b, r_k(R, r)]$, описывающих в неявном виде мировые линии $r(R, t)$ (здесь $r_{\pm} \equiv r_{\pm 1}$):

$$t = 2r_g \ln \frac{[(R_b + r_g)r_-]^{1/2} + [r_g(R_b + r_-)]^{1/2}}{[R_b(r_- - r_g)]^{1/2}} - [r_-(r_- + R_b)]^{1/2} \left(\frac{R_b}{r_g} + 1 \right)^{1/2} + \left(\frac{R_b}{r_g} + 1 \right)^{1/2} (R_b - 2r_g) \left(2^{1/2} + \ln \frac{r_-^{1/2} + (R_b + r_-)^{1/2}}{R_b^{1/2}} \right), \quad k = -1, \quad (52)$$

$$t = 2r_g \ln \frac{[(R_b - r_g)r_+]^{1/2} + [r_g(R_b - r_+)]^{1/2}}{[R_b(r_+ - r_g)]^{1/2}} + [r_+(R_b - r_+)]^{1/2} \left(\frac{R_b}{r_g} - 1 \right)^{1/2} + \frac{1}{2} (R_b + 2r_g) \left(\frac{R_b}{r_g} - 1 \right)^{1/2} \arccos \left(\frac{2r_+}{R_b} - 1 \right), \quad k = +1. \quad (53)$$

Обозначая константы в фиксированном слое R как:

$$a_{\pm} = (1 \mp r_g / R_b)^{1/2}, \quad b_{\pm} = (1 \mp r_{g,R} / R)^{1/2} \quad (54)$$

и вставляя r_k из (51) в (52)-(53), получаем выражения для $t(R, r)$, описывающего мировые линии $r(R, t)$. Для $k = -1$ результат имеет вид:

$$t = 2r_g \ln \frac{a_+ \left(1 + \frac{r}{R} - \frac{a_-}{b_-} \right)^{1/2} + \frac{r_g^{1/2}}{a_-} \left(1 + \frac{r}{R} \right)^{1/2}}{\left(1 + \frac{r}{R} - \frac{a_-^3}{b_-} \right)^{1/2}} - R_b a_- \left[\left(1 + \frac{r}{R} \right) \left(1 + \frac{r}{R} - \frac{a_-}{b_-} \right) \right]^{1/2} + (R_b - 2r_g) a_- \left(2^{1/2} + \ln \left[\left(\frac{b_-}{a_-} \left(1 + \frac{r}{R} \right) - 1 \right)^{1/2} + \frac{b_-^{1/2}}{a_-^{1/2}} \left(1 + \frac{r}{R} \right)^{1/2} \right] \right), \quad (55)$$

и соответственно для $k = +1$:

$$t = 2r_g \ln \frac{[a_+ - b_+(1 - r/R)]^{1/2} a_+ + [b_+(1 - r/R) r_g / R_b]^{1/2}}{[a_+^3 - b_+(1 - r/R)]^{1/2}} + (R_b + 2r_g) \times \times \frac{R_b^{1/2} a_+}{2r_g^{1/2}} \arccos \left(1 - \frac{2b_+}{a_+} \left(1 - \frac{r}{R} \right) \right) + \frac{R_b^{3/2} b_+^{1/2}}{r_g^{1/2}} \left(1 - \frac{r}{R} \right) \left[a_+ - b_+ \left(1 - \frac{r}{R} \right) \right]^{1/2}. \quad (56)$$

В выражение для производной $\dot{r}_k$, следующей из (51):

$$\dot{r}_k = \dot{r} \frac{R_b (1 - kr_{g,R} / R)^{1/2}}{R (1 - kr_g / R_b)^{1/2}}, \quad (57)$$

подставляем $\dot{r}$ из (25) и получаем:

$$\dot{r}_k = -\frac{R_b}{R} \left(\frac{r_{g,R} (1 - kr / R) (1 - kr_{g,R} / R)}{r (1 - kr_g / R_b)} \right)^{1/2}. \quad (58)$$

Производные $\dot{t}(R, r_k)$, следующие из (52) и (53), имеют вид:

$$\dot{t}_k = -\frac{k\dot{r}_k}{r_k - r_g} \left(\frac{r_k^3 (R_b - kr_g)}{r_g (R_b - kr_k)} \right)^{1/2}. \quad (59)$$

Подставив сюда $\dot{r}_k$ из (58), получаем:

$$\dot{t}_k = \frac{1}{r_k - kr_g} \left(\frac{r_k^3 R (1 - kr / R) (1 - kr_{g,R} / R)}{r (R_b - kr_k)} \right)^{1/2}. \quad (60)$$

Найдём теперь компоненты метрики. Подставляя в (47) $F = r_{g,R}$ и $f = -r_{g,R} / R$, затем заменяя $\dot{t}$ на $\dot{t}_k$, получаем:

$$e^\lambda = \frac{1}{1 - r_{g,R} / r}, \quad e^\nu = \dot{t}_k^{-2} \frac{1 - kr_{g,R} / R}{1 - r_{g,R} / r}. \quad (61)$$

Явный вид e^ν , после подстановки $\dot{t}_k$ из (60), является достаточно компактным:

$$e^\nu = \frac{-r / kR}{1 - r_{g,R} / r} \cdot \frac{\left(1 - \frac{kr}{R} - \frac{(1 - kr_g / R_b)^{3/2}}{(1 - kr_{g,R} / R)^{1/2}} \right)^2}{\left(1 - \frac{kr}{R} - \frac{(1 - kr_g / R_b)^{1/2}}{(1 - kr_{g,R} / R)^{1/2}} \right)^3}. \quad (62)$$

В первом приближении, когда r_g / R_b и $r_{g,R} / R$ являются малыми, или в пределе $k \rightarrow 0$, метрика сводится к параболическому решению ОС [].

2.4. Решение методом Клейна

Метод ОС основан на условии диагональности метрики на гиперповерхности $t = \text{const}$. Другим способом перехода к диагональной метрике является диагонализация общей метрики и впервые этот метод был применён к эллиптическому случаю ($k = +1$) О. Клейном [5].

В этом разделе статьи будет приведено полное решение задачи по методу Клейна для всех трёх скоростей, что позволит сравнить результаты с результатами полного решением по методу ОС.

Обозначения статьи Клейна связаны обозначениями данной статьи как:

$$a\eta = r, \quad a_0\eta = R, \quad a_0\eta_0 = R_b. \quad (63)$$

Линейный элемент в сопутствующих координатах τ, η

$$ds^2 = d\tau^2 - a^2 \left(\frac{d\eta^2}{1 - k\eta^2} + \eta^2 \right) d\Omega^2 \quad (64)$$

был преобразован в [5] в линейный элемент в координатах Шварцшильда t, r . Для диагонализации преобразованного линейного элемента разница во времени dt была уменьшена непосредственно до полного дифференциала, и из условия согласования был найден интегрирующий коэффициент.

Полученный линейный элемент имеет стандартный вид как в (36) с решением для метрики:

$$e^\lambda = \frac{1}{1 - \frac{a_0}{a} \eta^2}, \quad e^\nu = e^\lambda \frac{\left[1 - \frac{a_0}{ka} \left(1 - \frac{(1 - k\eta_0^2)^{3/2}}{(1 - k\eta^2)^{1/2}} \right) \right]^2}{\left[1 - \frac{a_0}{ka} \left(1 - \frac{(1 - k\eta_0^2)^{1/2}}{(1 - k\eta^2)^{1/2}} \right) \right]^3} \quad (65)$$

Решение для траектории принимает вид:

$$t = \frac{2a_0}{k(1 - k\eta_0^2)^{1/2}} \int_{z_k}^{z_k} \frac{z^4}{(1 + kz^2)^2 (z^2 - K_k^2)} dz, \quad (66)$$

где введены обозначения:

$$z_k = \left[\frac{k^{-1}a_0}{a_0 - ka} \left(\frac{1 - k\eta_0^2}{1 - k\eta^2} \right)^{1/2} - k^{-1} \right]^{1/2}, \quad (67)$$

$$K_k = \frac{\eta_0}{(1 - k\eta_0^2)^{1/2}}, \quad b_k = \frac{a_0}{k(1 - k\eta_0^2)^{1/2} (K_k^2 + k)}.$$

Решение Клейна для эллиптической скорости ($k = +1$) имеет вид [5]:

$$t = \frac{b_+ z_+}{1 + z_+^2} + \frac{b_+}{K_+^2 + 1} \left[(1 + 3K_+^2) \left(\frac{\pi}{2} - \arctan z_+ \right) + K_+^3 \ln \frac{z_+ + K_+}{z_+ - K_+} \right]. \quad (68)$$

Гиперболическое решение в (66) ($k = -1$) имеет вид:

$$t = -\frac{b_- z_-}{z_-^2 - 1} + \frac{b_-}{K_-^2 - 1} \left(K_-^3 \ln \frac{z_- - K_-}{z_- + K_-} + \frac{1 - 3K_-^2}{2} \ln \frac{z_- - 1}{z_- + 1} \right). \quad (69)$$

Решения (65)-(69), полученные методом Клейна, перепишем в обозначения данной статьи (63), используя соотношения:

$$\eta^2 = \frac{r_{g,R}}{R} = r_g \frac{R^2}{R_b^3}, \quad \eta_0^2 = \frac{r_g}{R_b}, \quad \frac{a}{a_0} = \frac{r}{R}, \quad a_0 \eta_0^3 = r_g, \quad a_0 = \frac{R_b}{\eta_0} = \frac{R_b^{3/2}}{r_g^{1/2}}. \quad (70)$$

Радиальная метрика в (65) переходит в

$$e^\lambda = \frac{1}{1 - \frac{a_0}{a} \eta^2} = \frac{1}{1 - \frac{R}{r} \frac{r_{g,R}}{R}} = \frac{1}{1 - \frac{r_{g,R}}{r}} \quad (71)$$

и равно e^λ в (61). Временная компонента метрики в (65) принимает вид (62).

В выражениях для мировой линии (68)-(69) вставка z_k из (67) в форме

$$z_k = \left[\frac{k^{-1}}{1 - kr/R} \left(\frac{1 - kr_g/R_b}{1 - kr_{g,R}/R} \right)^{1/2} - k^{-1} \right]^{1/2}, \quad (72)$$

приводит к выражениям (55)-(56), полученным методом ОС.

Таким образом, решения методом Клейна для $k = \pm 1$ в точности эквивалентны приведённым в данной статье решениям по методу ОС.

2.5. Решение методом Вайнберга

Другой метод, где для диагонализации метрики также была использована техника «интегрирующего множителя», было представлено в книге Вайнберга [6] (часть 3, раздел II.9). Обозначения этой книги относятся к нашим как:

$$\begin{aligned} \bar{r} = rR(t) \rightarrow r(t, R), \quad t \rightarrow \tau, \quad \bar{t} \rightarrow t, \quad a \rightarrow R_b, \quad R(0) = 1, \quad R(t) = \frac{r}{R}, \\ k \rightarrow \tilde{k} = \frac{r_g}{a^3}, \quad \tilde{k}a^2 = \frac{r_g}{R_b}, \quad \tilde{k}r^2 = \frac{r_{g,R}}{R} = r_g \frac{R^2}{R_b^3}. \end{aligned} \quad (73)$$

Здесь величина k из [6] отмечено сверху как $\tilde{k}$, чтобы не путать с k в данной статье.

Линейный элемент в сопутствующих координатах

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \tilde{k}r^2} - r^2 d\Omega^2 \right) \quad (74)$$

был преобразован в координаты Шварцшильда t, r . В новом линейном элементе:

$$ds^2 = Bd\bar{t}^2 - A d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 d\Omega^2 \quad (75)$$

решение для метрики имеет вид:

$$A = \frac{1}{1 - \tilde{k}r^2/R}, \quad B = \frac{R}{S} \left(\frac{1 - \tilde{k}r^2}{1 - \tilde{k}a^2} \right)^{1/2} \frac{(1 - \tilde{k}a^2/S)^2}{1 - \tilde{k}r^2/R}, \quad (76)$$

$$S(r, t) = 1 - \left(\frac{1 - \tilde{k}r^2}{1 - \tilde{k}a^2} \right)^{1/2} [1 - R(t)]. \quad (77)$$

Решение для мировой линии даётся в виде интеграла:

$$\bar{t} = \frac{(1 - k \cdot \tilde{k}a^2)^{1/2}}{\tilde{k}^{1/2}} \int_{S(r,t)}^1 \frac{dx x^{3/2}}{(x - \tilde{k}a^2)(1 - kx)^{1/2}}. \quad (78)$$

Вставив в (77) обозначения (73), получаем функцию r_k из метода ОС (51):

$$S(R, r) = k - k \left(\frac{1 - kr_{g,R}/r}{1 - kr_g/R_b} \right)^{1/2} (1 - kr/R) = \frac{1}{R_b} r_k(R, r) \quad (79)$$

и решение (78) принимает вид решения (8) методом ОС.

Радиальная метрика A из (76) переходит в

$$A = \frac{1}{1 - \frac{\tilde{k}r^2}{R(t)}} = \frac{1}{1 - \frac{R}{r} \frac{r_{g,R}}{R}} = \frac{1}{1 - \frac{r_{g,R}}{r}}, \quad (80)$$

совпадающую с e^λ в (61). Временная компонента метрики B из (76) принимает вид

$$B = \frac{r}{R} \left(\frac{1 - r_{g,R}/R}{1 - r_g/R_b} \right)^{1/2} \frac{(S - r_g/R_b)^2}{(1 - r_{g,R}/r)S^3}, \quad (81)$$

и после вставки S из (79) даёт e^ν из (62).

Таким образом, все три метода, ОС [2], Клейна [5] и Вайнберга [6], приводят к одному и тому же точному решению уравнений Эйнштейна для однородной пылевой звезды. Этот факт не только означает корректность этих методов решения, но и ещё раз демонстрирует фундаментальный характер данного решения для общерелятивистского коллапса однородной пылевой звезды, которое не зависит от методов его получения.

3. Внутренняя структура и эволюция застывающей пылевой звезды

3.1. Мировые линии частиц слоёв и их асимптоты

а) *Параболические скорости* ($k = 0$).

Графики мировых линий $r(R, t)$ частиц внутри звезды для параболического решения ОС были детально изучены в первой статье [1] и здесь приведём лишь основные результаты. Соответствующие графики показаны на Рис. 3, где показаны асимптоты $r_\infty^{(0)}(R)$, к которым стремятся мировые линии частиц в слоях $r(R, t)$ при $t \rightarrow \infty$. Асимптоты, параллельные мировой линии центра, расположены почти на равном расстоянии, слегка уплотняясь вблизи поверхности.

Поверхность звезды асимптотически приближается к её гравитационному радиусу $r_b(t) \rightarrow r_g$ и при $t \gg r_g$ асимптотика для поверхности принимает вид:

$$r_b(t) \simeq r_g (1 + a e^{-t/r_g}) > r_g, \quad (82)$$

$$a \equiv 4 \exp \left(\frac{2R_b^{3/2}}{3r_g^{3/2}} - \frac{8}{3} \right).$$

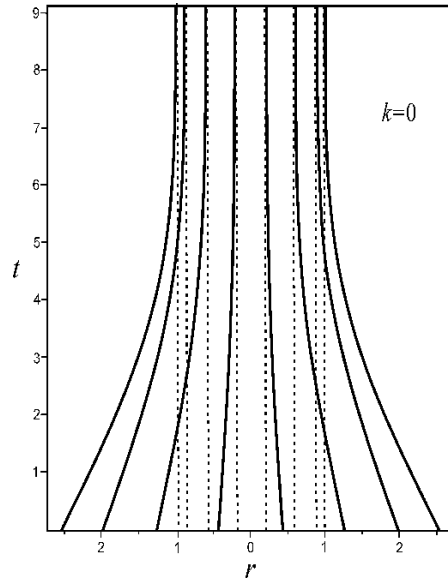


Рис. 3. Мировые линии частиц пылевой звезды вдоль её диаметра согласно решению ОС при параболической скорости ($k = 0$) и $R_b = 3.5$ при $\tau = 0$ (в единицах r_g). При $t \gg r_g$ поверхность застывает вне r_g , внутренние слои застывают около своих асимптот $r_\infty(R)$ (пунктирных линий), заданных (84).

Внутри звезды при $t \gg r_g$ имеем $y_{(0)} \rightarrow 1$ и асимптотика $r(R, t)$ принимает вид:

$$r(R, t) \simeq R \frac{3r_g}{2R_b} \left(1 - \frac{R^2}{3R_b^2} + ae^{-t/r_g} \right). \quad (83)$$

Это ведёт к выражению для асимптот:

$$r_{\infty}^{(0)}(R) = R \frac{3r_g}{2R_b} \left(1 - \frac{R^2}{3R_b^2} \right) = r_{g,R} + \frac{3r_{g,R}}{2} \left(\frac{R_b^2}{R^2} - 1 \right). \quad (84)$$

где $r_{\infty}^{(0)}(R_b) = r_g$. Отсюда видно, что $r_{\infty}^{(0)}(R)$ есть «внутренний» гравитационный радиус слоя R , который эффективно образуется гравитационным радиусом $r_{g,R}$ вещества внутри слоя, а также вторым членом (84), который описывает вклад замедления времени из-за внешних слоёв.

Как следует из (84), асимптоты ближайших к центру внутренних слоёв располагаются почти эквидистантно $\sim R$ (Рис. 3), и только слои вблизи поверхности уплотняются из-за пространственных сжатий и последующего застывания, что описывается фактором $-r_g R^3 / 2R_b^3$.

Асимптотическое поведение собственных времён частиц в слоях звезды находим подставив (83) в выражение для $\tau(R, r)$ [1]:

$$\tau(R, t) = \frac{2R_b^{3/2}}{3r_g^{1/2}} - \frac{3^{1/2}r_g}{2^{1/2}} \left(1 - \frac{R^2}{3R_b^2} + ae^{-t/r_g} \right)^{3/2}. \quad (85)$$

Собственные времена в каждом слое застывают при значениях $\tau_{\infty}^{(0)}(R)$:

$$\tau_{\infty}^{(0)}(R) = \frac{2R_b^{3/2}}{3r_g^{1/2}} - \frac{3^{1/2}r_g}{2^{1/2}} \left(1 - \frac{R^2}{3R_b^2} \right)^{3/2}, \quad (86)$$

$$\tau_{\infty}^{(0)}(0) = \frac{2r_g}{3} \left(\frac{R_b^{3/2}}{r_g^{3/2}} - \frac{3^{3/2}}{2^{3/2}} \right), \quad \tau_{\infty}^{(0)}(R_b) = \frac{2r_g}{3} \left(\frac{R_b^{3/2}}{r_g^{3/2}} - 1 \right). \quad (87)$$

Прежде всего застывает центр в момент $\tau_{\infty}^{(0)}(0)$, а поверхность застывает позже всех слоёв при $\tau_{\infty}^{(0)}(R_b)$ и интервал собственного времени застывания всех слоёв равен:

$$\tau_{\infty}^{(0)}(R_b) - \tau_{\infty}^{(0)}(0) = \frac{2}{3} \left(\frac{3^{3/2}}{2^{3/2}} - 1 \right) r_g \approx 0.558 r_g. \quad (88)$$

б) *Эллиптическая и гиперболическая скорости* ($k = \pm 1$).

Графики мировых линий $r(R, t)$ для гиперболических и эллиптических решений (55)-(56) показан на Рис. 5-6. Они показывают, что при $t \rightarrow \infty$ мировые линии частиц в разных слоях R , как и в параболическом случае, также стремятся к своим асимптотам $r_{\infty}^{(k)}(R)$. Найдём теперь выражения для этих асимптот.

В (55)-(56) при $t \gg r_g$ имеем $r_{\pm} \rightarrow r_g$, когда доминируют логарифмические члены. Поэтому приравняв $r_k(R, r)$ в (51) величине r_g , и подставив $r \rightarrow r_{\infty}^{(k)}(R)$, получаем:

$$r_k(R, r) \rightarrow -\frac{R_b}{k} \left(\frac{(1 - kr_{g,R} / R)^{1/2} (1 - kr_{\infty}^{(k)}(R) / R)}{(1 - kr_g / R_b)^{1/2}} - 1 \right) = r_g. \quad (89)$$

Выразив отсюда $r_{\infty}^{(k)}(R)$, находим общую формулу для асимптот внутренних слоёв:

$$r_{\infty}^{(k)}(R) = \frac{R}{k} \left(1 - \frac{(1 - kr_g / R_b)^{3/2}}{(1 - kr_g R^2 / R_b^3)^{1/2}} \right). \quad (90)$$

В пределах $R_b \gg r_g$ или $k \rightarrow 0$ эта формула переходит в (84).

Тот же результат следует также и из условия зануления временной компоненты метрики $\exp[\nu(r_{\infty})] = 0$, означающего застывание собственных времён:

$$\frac{(1 - kr_g / R)^{3/2}}{(1 - kr_{g,R} / R)^{1/2}} - \left(1 - k \frac{r_{\infty}^{(k)}}{R} \right) = 0. \quad (91)$$

Асимптоты внутренних слоёв звезды, параллельные мировой линии центра, расположены почти эквидистантно, уплотняясь только вблизи поверхности.

Моменты застывания собственных времён слоёв $\tau_{\infty}^{(k)}(R)$ находим подставив $r_{\infty}^{(k)}(R)$ в (26)-(27). Для эллиптической скорости $k = +1$ моменты застывания слоёв, а также центра $\tau_{\infty}^{(+1)}(0)$ и поверхности $\tau_{\infty}^{(+1)}(R_b) > \tau_{\infty}^{(+1)}(0)$ равны:

$$\tau_{\infty}^{(+1)}(R) = \frac{R_b^{3/2}}{2r_g^{1/2}} \left[\arccos \left(1 - \frac{2a_+^3}{b_+} \right) + 2 \left(1 - \frac{a_+^3}{b_+} \right)^{1/2} \frac{a_+^{3/2}}{b_+^{1/2}} \right], \quad (92)$$

$$\tau_{\infty}^{(+1)}(0) = \frac{R_b^{3/2}}{2r_g^{1/2}} \left[\arccos(1 - 2a_+^3) + 2(1 - a_+^3)^{1/2} a_+^{3/2} \right], \quad (93)$$

$$\tau_{\infty}^{(+1)}(R_b) = \frac{R_b^{3/2}}{2r_g^{1/2}} \arccos \left(\frac{2r_g}{R_b} - 1 \right) + \frac{R_b^2}{r_g} \left(1 - \frac{r_g}{R_b} \right)^{1/2}. \quad (94)$$

Для $k = -1$ соответствующие выражения имеют вид:

$$\tau_{\infty}^{(-1)}(R) = \frac{R_b^{3/2}}{r_g^{1/2}} \left\{ 2^{1/2} - \left[\frac{a_-^3}{b_-} \left(\frac{a_-^3}{b_-} - 1 \right) \right]^{1/2} + \ln \left(\left(\frac{a_-^3}{b_-} - 1 \right)^{1/2} + \frac{a_-^{3/2}}{b_-^{1/2}} \right) - \ln(1 + 2^{1/2}) \right\}, \quad (95)$$

$$\tau_{\infty}^{(-1)}(0) = \frac{R_b^{3/2}}{r_g^{1/2}} \left[2^{1/2} - [a_-^3(a_-^3 - 1)]^{1/2} + \ln \left(\frac{(a_-^3 - 1)^{1/2} + a_-^{3/2}}{1 + 2^{1/2}} \right) \right], \quad (96)$$

$$\tau_{\infty}^{(-1)}(R_b) = \frac{R_b^{3/2}}{r_g^{1/2}} \left[2^{1/2} - \left[(1 + r_g / R_b) r_g / R_b \right]^{1/2} \ln \left(\frac{(1 + r_g / R_b)^{1/2} + r_g^{1/2} / R_b^{1/2}}{1 + 2^{1/2}} \right) \right]. \quad (97)$$

Найдём асимптотику зависимости от t основных переменных при $t \gg r_g$, когда $r_k \rightarrow r_g$. Соотношения (52)-(53) упрощаются и мировые линии принимают вид

$$r_k \simeq r_g [1 + b_k(R) e^{-t/r_g}], \quad (98)$$

$$b_{+1} = 4(1 - r_g / R_b) \exp \left[\frac{R_b}{r_g} - 1 + (R_b + 2r_g) \left(\frac{R_b}{r_g} - 1 \right)^{1/2} \arccos \frac{r_g^{1/2}}{R_b^{1/2}} \right],$$

$$b_{-1} = 2(1 + r_g / R_b) \exp(1 + r_g / R_b) \times$$

$$\times \exp \left[\left(2 - \frac{R_b}{r_g} \right) \left(2^{1/2} + \ln \frac{r_g^{1/2} + (R_b + r_g)^{1/2}}{R_b^{1/2}} \right) + \left(1 + \frac{R_b}{r_g} \right)^{1/2} \right]. \quad (99)$$

Подставив r_k из (98) вместо r в (51) находим асимптотику мировых линий:

$$r_k(R, t) \simeq \frac{R}{k} \left[1 - \frac{(1 - kr_g / R_b)^{1/2}}{(1 - kr_{g,R} / R)^{1/2}} \left(1 - \frac{kr_g}{R_b} (1 + b_k e^{-t/r_g}) \right) \right]. \quad (100)$$

При $t \rightarrow \infty$ выражение (100) переходит в (90). Подставив (100) в (26)-(27) можем найти и асимптотику собственного времени частиц пылевой звезды $\tau(t, R)$.

3.2. Внутренняя метрика и её асимптотики

а) Параболическая скорость

При $t \gg r_g$ для радиальной компоненты метрики в (61) с учётом (83) имеем:

$$e^{\lambda(t,R)} \simeq \frac{1 - R^2 / 3R_b^2 + 2a / (3e^{t/r_g})}{1 - R^2 / R_b^2 + 2a / (3e^{t/r_g})}, \quad e^{\lambda(\infty,R)} \simeq \frac{1 - R^2 / 3R_b^2}{1 - R^2 / R_b^2}. \quad (101)$$

Графики асимптот $e^{\lambda(t,R)}$ показан на Рис. 5. В центре $R=0$ и на поверхности $R=R_b$ асимптотические значения $e^{\lambda(t,R)}$ равны $e^{\lambda(t,0)}=1$, $e^{\lambda(t,R_b)} \simeq e^{t/r_g} / a$.

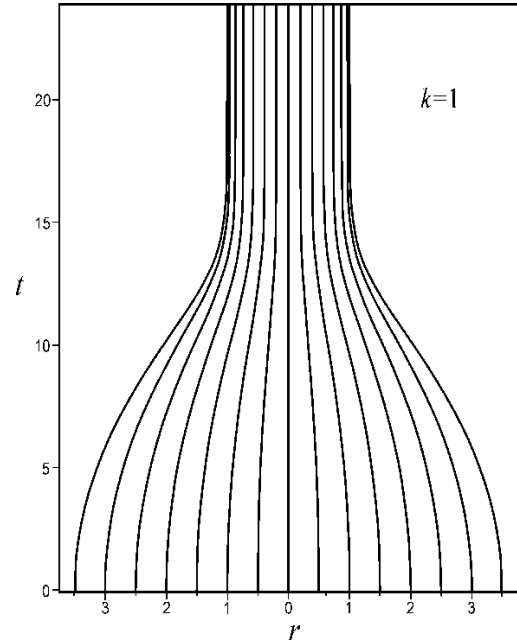
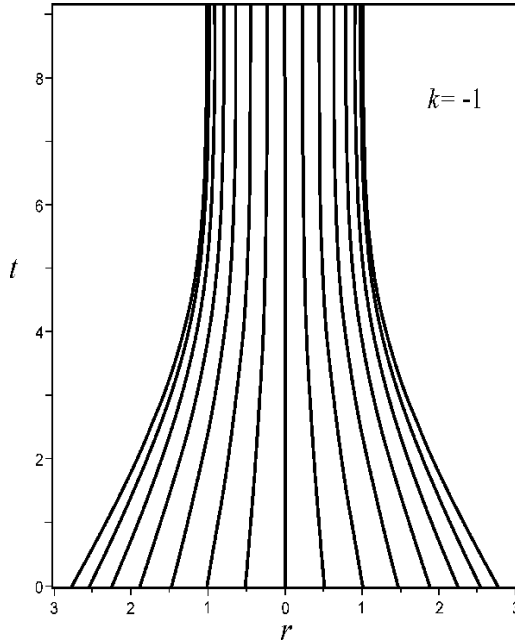


Рис. 5а. Мировые линии модели ОС частиц пылевой звезды вдоль диаметра звезды при гиперболической скорости ($k = -1$) и

Рис. 5б. Мировые линии при тех же условиях, что и на рис. 4, но для эллиптической скорости ($k = 1$).

$R_b = 3.5$ при $\tau = 0$ (в единицах r_g). При больших t мировые линии времениподобны, поверхность застывает вне гравитационного радиуса, другие слои застывают около асимптот.

Временная компонента при $t \gg r_g$, с учётом $y_{(0)} \simeq 1 + ae^{-t/r_g}$, имеет вид [1]:

$$e^{\nu(t,R)} \simeq e^{-2t/r_g} \frac{3a^2(1 - R^2 / 3R_b^2)^2}{2[1 - R^2 / R_b^2 + 2a / (3e^{t/r_g})]}. \quad (102)$$

Её значения в центре и на поверхности: $e^{\nu(t,0)} \simeq 3a^2 e^{-2t/r_g} / 2$ и $e^{\nu(t,R_b)} \simeq ae^{-t/r_g}$. При $t \rightarrow \infty$ метрика (102) стремится к:

$$e^{\nu(\infty,R)} = e^{-2t/r_g} \frac{3a^2(1 - R^2 / 3R_b^2)^2}{2(1 - R^2 / R_b^2)}. \quad (103)$$

Из (103) видно, что застывание тем сильнее чем ближе к центру.

б) Гиперболическая и эллиптическая скорости

При больших t радиальная метрика в (61), после вставки r_k из (100), принимает вид:

$$e^{-\lambda} = 1 + \frac{r_{g,R}}{kR} \left[\frac{(1 - kr_g / R_b)^{1/2}}{(1 - kr_{g,R} / R)^{1/2}} \left(1 - k \frac{r_g}{R_b} (1 + b_k e^{-t/r_g}) \right) - 1 \right]^{-1}. \quad (104)$$

В центре и на поверхности её значения равны:

$$e^{\lambda(t,0)} = 1, \quad e^{\lambda(t,R_b)} \simeq a^{-1} e^{t/r_g}. \quad (105)$$

При $t \rightarrow \infty$ радиальная метрика стремится к своей асимптоте:

$$e^{-\lambda(R,\infty)} = 1 + \frac{r_{g,R}}{kR} \left[\frac{(1 - kr_g / R_b)^{1/2}}{(1 - kr_{g,R} / R)^{1/2}} \left(1 - k \frac{r_g}{R_b} \right) - 1 \right]^{-1}. \quad (106)$$

Асимптотику временной компоненты метрики (62) находим путём подстановки r_k из (100) вместо r , что даёт:

$$e^\nu = \frac{-R_b b_k^2 e^{-2t/r_g}}{kr_g (1 - kr_g / R_b)^{1/2}} \times \\ \times \frac{\left[(1 - kr_g / R_b)^{3/2} - (1 - kr_{g,R} / R)^{1/2} \right]^2}{[1 - k(1 + b_k e^{-t/r_g})r_g / R_b](1 - kr_g / R_b)^{1/2} - k(1 - kr_{g,R} / R)^{3/2}}. \quad (107)$$

В центре и на поверхности её значения равны:

$$e^{\nu(0)} = \frac{1 - (1 - kr_g / R_b)^{3/2}}{kr_g (1 - kr_g / R_b)^{1/2}} R_b b_k^2 e^{-2t/r_g}, \quad e^{\nu_b} \simeq b_k e^{-t/r_g} \simeq 1 - r_g / r_b. \quad (108)$$

Заключение

Мировая линия поверхности при $r_b > r_g$ (и $\varphi, \theta = const.$) описывается $t(R_b, r)$ и $\tau(R_b, r)$, обозначая одно и то же событие той же частицы на поверхности. Существует взаимно-однозначное соответствие между обеими кривыми $t(R, r)$ и $\tau(R, r)$, представляющими одни и те же события на одной и той же мировой линии, и поэтому обе кривые являются асимптотическими. При $t \rightarrow \infty$ они асимптотически приближаются к гравитационному радиусу $r(R, t) \rightarrow r_g$ и $r(R, \tau(R, t)) \rightarrow r_g$.

Графики мировых линий частиц звезды (Рис. 3-5) ясно показывают внутреннюю структуру пылевой звезды на гиперповерхностях одновременности. При больших t мировые линии частиц во всех слоях приближаются к своим по внутренним эффективным гравитационным радиусам, которые играют роль асимптот, параллельных оси t и расположенных почти эквидистантно от центра, уплотняясь только вблизи поверхности.

Это показывает, что картина застывшей звезды относится не только к поверхности, асимптотически приближающейся к гравитационному радиусу, всегда оставаясь вне её, но также и к структуре пылевой звезды в целом. Картина структуры и эволюции звезды с асимптотически застывшими слоями на гиперповерхности одновременности будет воспроизведено во всех системах отсчёта с любой из их координат, если будет обеспечено правильное соответствие с внешним решением.

Преобразования, правильные с точки зрения общей теории относительности и астрофизики, - это те, которые описывают в любой конечный момент t только те события во внутренних слоях звезды, которые совпадают с моментом t на поверхности. Все остальные описания, основанные на неодновременных событиях в

разных частях звезды, являются либо нефизическими, либо будут вспомогательными для перехода к набору одновременных событий во всём объёме звезды.

Также важно, чтобы мировые линии частиц звезды в точных решениях уравнений Эйнштейна охватывали каждый момент существования этих частиц в реальном мире, и, следовательно, только эти решения дают нам полную картину эволюции звезды. Необратимое замедление собственных времён относительно t из-за релятивистского и гравитационного замедлений является тем объективным физическим явлением, которое останавливает все процессы в звезде, включая и сам процесс коллапса. Это фундаментальное физическое явление принципиально отличает сценарий коллапса в ОТО от ньютоновского, где такого механизма остановки нет.

Таким образом, коллапс однородной пылевой звезды в ОТО согласно точным решениям в любой конечный момент мирового времени приводит к застывшей звезде или фрозару, объекту с почти однородной и практически застывшей внутренней структурой с времениподобными мировыми линиями его частиц.

Приложение. Вывод выражения для вспомогательной функции y

Условие диагональности (47) (y пишем без индекса k) для :

$$\frac{y'}{\dot{y}} = \frac{\dot{r}r'}{1 - kr_{g,R}/R} = -\frac{(r_{g,R}r)^{1/2}}{R - kr_{g,R}}(1 - kr/R)^{1/2} \quad (109)$$

рассматриваем как уравнение для y и решение для ищем среди функций вида [1,7]:

$$y(R, r) = A(R) + B(R, r), \quad (110)$$

где не зависящая от r аддитивная часть y обозначена как A . Для B в общем случае выбор слишком большой и поэтому будем искать частное решение, ограничившись функциями, у которых исчезает полная производная от B по R . Тогда получаем:

$$B' = -\frac{\partial B}{\partial r}r', \quad y' = A' + B' + \frac{\partial B}{\partial r}r' = A', \quad \dot{y} = \frac{\partial B}{\partial r}\dot{r}. \quad (111)$$

Уравнение для y (109) в этом случае принимает вид:

$$\frac{y'}{\dot{y}} = A' \left(\frac{\partial B}{\partial r} \dot{r} \right)^{-1} = \frac{\dot{r}r'}{1 - kr_{g,R}/R}, \quad (112)$$

что даёт уравнение для нахождения A :

$$A' = \frac{\dot{r}^2 r'}{1 - kr_{g,R}/R} \frac{\partial B}{\partial r} = \frac{r_{g,R}}{R - kr_{g,R}} \left[\frac{\partial B}{\partial r} \left(1 - \frac{kr}{R} \right) \right] = \frac{r_{g,R}}{R - kr_{g,R}} q(R). \quad (113)$$

Здесь выражение в квадратной скобке обозначено $q(R)$, так как A' не зависит от r и поэтому правая часть (113) также не зависит от r . Это позволяет выразить B как:

$$\frac{\partial B}{\partial r} \left(1 - \frac{kr}{R} \right) = q(R), \quad B = q \int \frac{dr}{1 - kr/R} = -\frac{qR}{k} \ln(1 - kr/R). \quad (114)$$

Отсюда, с учётом (111) и $r' = r/R$, получаем:

$$\frac{q'}{q} = -\frac{1}{R}, \quad \ln q = -\ln R + \ln w, \quad q = \frac{w}{R}. \quad (115)$$

Таким образом, из (114) и (115) приходим к выражению для B :

$$B = -\frac{w}{k} \ln(1 - kr/R). \quad (116)$$

Подстановка (115) в (113) позволяет найти A :

$$A' = \frac{r_{g,R}}{R - kr_{g,R}} \frac{w}{R} = w \frac{Rr_g / R_b^3}{1 - R^2 kr_g / R_b^3}, \quad A = -\frac{w}{2k} \ln \frac{1 - kr_{g,R} / R}{1 - kr_g / R_b}. \quad (117)$$

И наконец, подставляя (116)-(117) в (112), находим окончательное решение для $y_{(k)}$:

$$y_{(k)}(R, r) = -\frac{w}{k} \ln \frac{(1 - kr_{g,R} / R)^{1/2} (1 - kr / R)}{(1 - kr_g / R_b)^{1/2}}. \quad (118)$$

Производные от y , с учётом (25), равны:

$$y' = A' = \frac{r_{g,R}}{R - kr_{g,R}} \frac{w}{R}, \quad \dot{y} = \frac{\partial B}{\partial r} \dot{r} = \frac{w \dot{r}}{R - kr} = -\frac{w r_{g,R}^{1/2}}{R r^{1/2}} \cdot \frac{1}{(1 - kr / R)^{1/2}}. \quad (119)$$

Для $k = \pm 1$ функцию $y_{(k)}$ используем прямо из (118), тогда как для $k = 0$ находим $y_{(0)}$ из (118) в пределе $k \rightarrow 0$:

$$y_{(0)}(R, r) = \frac{w r_g}{R_b} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{R_b^2} - 1 \right) + \frac{r R_b}{R r_g} \right]. \quad (120)$$

Уравнение (112) определяет $y_{(k)}$ лишь с точностью до константы w , который и присутствует в (118). Решение для $y_{(0)}$ в статье ОС соответствует выбору в (120) $w = R_b / r_g$. В общем случае w находим аналогично, из сшивания на поверхности. На поверхности $t = M(r / r_g)$ и $y = r / r_g$, что с учётом, (116) and (115) даёт:

$$y(R_b, r) = \frac{w}{R_b} r = \frac{r}{r_g}, \quad w = \frac{R_b}{r_g}, \quad q(R_b) = \frac{w}{R_b} = \frac{1}{r_g}. \quad (121)$$

Отсюда имеем:

$$q = \frac{w}{R} = \frac{R_b}{R r_g}, \quad B = -\frac{R_b}{k r_g} \ln(1 - kr / R). \quad (122)$$

Подставляя это в (117), получим:

$$A' = \frac{R}{R_b^2} \frac{1}{1 - kr_{g,R} / R}, \quad A = -\frac{R_b}{2k r_g} \ln \frac{1 - kr_{g,R} / R}{1 - kr_g / R_b}. \quad (123)$$

Таким образом, подставляя (122)-(123) в (110), находим окончательное решение (вставляя индекс k):

$$y_{(k)}(R, \tau) = -\frac{R_b}{kr_g} \ln \frac{(1 - kr_{g,R} / R)^{1/2} (1 - kr / R)}{(1 - kr_g / R_b)^{1/2}}. \quad (124)$$

Следовательно, производные от y равны:

$$y' = A' = \frac{R^2}{R_b^2} \frac{1}{R - kr_{g,R}}, \quad \dot{y} = -\frac{R^2}{R_b^2 (r_{g,R} r)^{1/2}} \frac{1}{(1 - kr / R)^{1/2}}, \quad (125)$$

и условие диагональности (112) удовлетворяется.

Литература

1. Закир, З. (2020) *Квант. и грав. физ.*, **1**(1), с. [27](#); (2018)
2. Oppenheimer J., Snyder H. (1939) *Phys. Rev.*, **56**, [455](#).
3. Friedmann, A. (1922). *Z. Phys.*, **10**, 376.
4. Tolman R. (1934) *Proc. N. Acad. Sci. USA*, **20**, 169.
5. Klein, O. (1961). Ein. Prob. allgem Rel. в *W. Heisenb. Phys. unz. Z.*, 58.
6. Weinberg S. (1972). *Gravitation and Cosmology*. Wiley.
7. Закир З. (2017) *ТФМК*, **12**(1) [1](#); **12**(1) [17](#).
8. Zakir Z. (2018) *Astroph. & Sp. Sci.* **363**: [30](#).
9. Закир, З. (2020) *Теория фрозаров. Релятивистский коллапс звёзд*. [ЦТФА](#), Т.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. (2003) *Теория поля*. 8-изд. М.